Бэровские функции и пространства бэровских функций

Е. Г. ПЫТКЕЕВ
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: pyt@imm.uran.ru

УДК 515.12

Ключевые слова: топология поточечной сходимости, K-аналитическое пространство, пространство бэровских функций, Z_σ-отображение.

Аннотация

В работе изучаются теснота пространств бэровских функций, а также их подпространств, наделённых топологией поточечной сходимости, Z_σ-отображения K-аналитических пространств, K_σ-аналитические пространства — тихоновские пространства, являющиеся Z_σ-образами K-аналитических пространств.

Abstract

E. G. Pytkeev, Baire functions and spaces of Baire functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 9 (2003), no. 4, pp. 3—39.

The paper considers (1) the tightness of spaces of Baire functions and their subspaces endowed with the topology of pointwise convergence; (2) Z_σ-mappings of K-analytic spaces; (3) K_σ-analytic spaces (Tychonoff spaces which are Z_σ-images of K-analytic spaces).

Введение

В статье рассматриваются вопросы, относящиеся к изучению пространств функций первого бэровского класса $B_1(X)$ над тихоновским пространством X в топологии поточечной сходимости, исследуются теснота и близкие к ней свойства, а также компактность в $B_1(X)$. Кроме того, изучаются Z_σ-отображения K-аналитических пространств.

В статье приняты следующие обозначения. Если A — множество в топологическом пространстве X, то через $|A|$ будем обозначать мощность множества A, через $\overline{A}$ (или $[A]$) — замыкание множества A, через $\operatorname{Int} A$ — внутренность множества A. Если γ — семейство подмножеств X, то $\bigcup\gamma = \bigcup\{H : H \in \gamma\}$, $\bigcap\gamma = \bigcap\{H : H \in \gamma\}$. Основные кардинальные инварианты: $w(X)$ — вес X, $nw(X)$ — сетевой вес X, $c(X)$ — число Суслина X, $l(X)$ — число Линделёфа X, $s(X)$ — спрэд X, $t(X)$ — теснота X, $d(X)$ — плотность X. Если $\phi(X)$ — кардинальный инвариант, то $h\phi(X) = \sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\}$. Все не определяемые в работе понятия и результаты можно найти в [1, 5, 13, 14].

Фундаментальная и прикладная математика, 2003, том 9, № 4, с. 3—39.

§ 1. Теснота

Если λ — некоторый кардинал ($\lambda \geqslant \aleph_0$), то G_λ-множеством называется множество, являющееся пересечением не более чем λ открытых подмножеств ($G_{\aleph_0}$-множества принято называть G_δ-множествами). Совокупность всех G_λ-множеств (λ фиксировано) является базой для некоторой топологии на X. Будем обозначать пространство с этой топологией, называемое λ-модификацией пространства X [5, 34], через X_λ. Как заметил Лорх [27], $\aleph_0$-модификация тихоновской топологии совпадает с наименьшей топологией на X, порождённой как всеми бэровскими функциями, так и только бэровскими функциями первого класса. Этот факт, а также «массивность» $B_1(X)$ в $C_p(X_{\aleph_0})$ (иногда ещё и нульмерность $X_{\aleph_0}$) является причиной того, что топологические свойства $B_1(X)$ и $B(X)$ часто совпадают с топологическими свойствами $C_p(X_{\aleph_0})$. Подробно эти вопросы рассматривались А. И. Пестряковым в [9]. В частности, он доказал следующие утверждения.

Теорема A. *Если X — тихоновское пространство, то*

$$t(B_1(X)) = t(B(X)) = t(C_p(X_{\aleph_0})) = \sup_{n\in\mathbb{N}} l(X^n_{\aleph_0}).$$

Теорема B. *Если X — тихоновское пространство, то*

$$hd(B_1(X)) = hd(B(X)) = hd(C_p(X_{\aleph_0})) = \sup_{n\in\mathbb{N}} hl(X^n_{\aleph_0}).$$

Теорема C. *Если X — тихоновское пространство, то*

$$hl(B_1(X)) = hl(B(X)) = hl(C_p(X_{\aleph_0})) = \sup_{n\in\mathbb{N}} hd(X^n_{\aleph_0}).$$

Теорема D. *Если X — тихоновское пространство, то*

$$s(B_1(X)) = s(B(X)) = s(C_p(X_{\aleph_0})) = \sup_{n\in\mathbb{N}} s(X^n_{\aleph_0}).$$

В доказательстве этих результатов используются результаты и методы C_p-теории (см. [4]).

Из теоремы A, а также из теории кардинальных инвариантов топологических пространств естественно возникает задача оценки числа Линделёфа $X_{\aleph_0}$ через кардинальные инварианты X. Приведём некоторые результаты в этом направлении. Так, в [27] было доказано, что если X — компакт, то $l(X_{\aleph_0}) \leqslant \aleph_0$ тогда и только тогда, когда X — разреженное пространство. Так как разреженность — конечно-мультипликативное свойство, то из теоремы A следует, что $t(B_1(X)) = t(B(X)) \leqslant \aleph_0$ (X — компакт) тогда и только тогда, когда X разрежен. Если же компакт X не разрежен, то $t(B_1(X)) = t(B(X)) \geqslant l(X_{\aleph_0}) \geqslant \mathfrak{c}$. А. В. Архангельский [2] (см. также [34]) поставил задачу: для каких компактов X верно $l(X_{\aleph_0}) \leqslant \mathfrak{c}$? Как показано в [34], ответ положителен, если X — конечное произведение упорядоченных компактов. В частности, отсюда следует, что $t(B(Y)) \leqslant \mathfrak{c}$, где Y — упорядоченный компакт.

В [30] доказано, что $l(X_{\aleph_0}) \leqslant \mathfrak{c}$, где X — компакт со счётной теснотой. Так как $t(X^n) = t(X)$ для всякого компакта и любого $n \in \mathbb{N}$ [5], то это влечёт $t(B(X)) \leqslant \mathfrak{c}$. Укажем ещё один класс компактов, для которых ответ положителен. Назовём компакт X слабо корсоновским, если в X найдётся точечно-счётное семейство γ открытых множеств, T_0-разделяющее точки X, т. е. для всяких двух различных точек X найдётся $U \in \gamma$, содержащее лишь одну из них. Теснота слабо корсоновского компакта X может быть несчётной, но, как доказано в [30], $l(X_{\aleph_0}) \leqslant \mathfrak{c}$. В силу того что конечная степень слабо корсоновского пространства — слабо корсоновское пространство, получаем $t(B(X)) \leqslant \mathfrak{c}$. В [2, 34] на примере пространства $\beta(\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — дискрет, было показано, что число Линделёфа $\aleph_0$-модификации компакта может быть сколь угодно большим. Отсюда следует, что и теснота $B_1(X)$, где X — компакт, не ограничена.

Теорема 1.1. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда справедливо*

$$t(C_p(X)) \leqslant t(B(X)) \leqslant \exp(t(C_p(X)) \cdot t(X)).$$

Доказательство. Так как $C_p(X) \subseteq B_1(X)$, то $t(C_p(X)) \leqslant t(B_1(X))$. Положим $t(X) = \mu$, $t(C_p(X)) = \tau$. Заметим, что в силу теоремы Архангельского—Пыткеева $l(X^n) \leqslant t(C_p(X)) = \tau$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы А достаточно доказать, что $l(X^n_{\aleph_0}) \leqslant 2^{\tau\mu}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем n_0. Пусть γ — покрытие X^{n_0}, состоящее из G_δ-множеств. Для всякого $T \in \gamma$ зафиксируем такое счётное семейство $B(T)$ открытых в X^{n_0} множеств, что $\bigcap B(T) = T$. Используя трансфинитную индукцию, построим такие замкнутые множества $F_\alpha \subseteq X$, $\alpha < (\mu\tau)^+$, и семейства $\gamma_\alpha \subseteq \gamma$, $\alpha < (\mu\tau)^+$, что выполнены следующие условия.

1. $F_\beta \subseteq F_\alpha$, $nw(F_\alpha) \leqslant 2^{\tau\mu}$, $\beta < \alpha < (\mu\tau)^+$.
2. $|\gamma_\alpha| \leqslant 2^{\tau\mu}$, $\gamma_\beta \subseteq \gamma_\alpha$, $\beta < \alpha < (\mu\tau)^+$ и $\bigcup \gamma_\alpha \supseteq F^{n_0}_\alpha$.
3. Для всякого подсемейства $U \subseteq \bigcup\{B(T)\colon T \in \bigcup\{\gamma_\beta\colon \beta < \alpha\}\}$ мощности $\leqslant \tau$, если $X^{n_0} \setminus \bigcup U \neq \varnothing$, то и $F^{n_0}_\alpha \setminus \bigcup U \neq \varnothing$, $\alpha < (\mu\tau)^+$.

Положим $F_0 = \{x_0\}$, $x_0 \in X$, $\gamma_0 = \{T_0\}$, где $\underbrace{(x_0, \ldots, x_0)}_{n_0 \text{ раз}} \in T_0 \in \gamma$. Предположим, что $\alpha_0 > 0$ и для всякого $\alpha < \alpha_0$ определены множества F_α и семейства γ_α, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3. Положим $B = \bigcup\{B(T)\colon T \in \bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}\}$ и $P = \{U \subseteq B\colon |U| \leqslant \tau$ и $X^{n_0} \setminus \bigcup U \neq \varnothing\}$. Обозначим через $\tilde{P}$ множество, полученное выбором точки $X^{n_0} \setminus \bigcup U$ для всякого $U \in P$. Заметим, что $|\tilde{P}| \leqslant$ $\leqslant |B|^\tau \leqslant (2^{\tau\mu})^\tau = 2^{\tau\mu}$. Положим $F_{\alpha_0} = \left[\bigcup\{F_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} \pi_i \tilde{P}\right]$. Тогда $d(F_{\alpha_0}) \leqslant 2^{\tau\mu}$ и, так как для хаусдорфовых пространств Z справедливо неравенство $nw(Z) \leqslant d(Z)^{t(Z)\cdot l(Z)}$ [3], то и $nw(F_{\alpha_0}) \leqslant 2^{\tau\mu}$. Тогда и $nw(F^{n_0}_{\alpha_0}) \leqslant 2^{\tau\mu}$. Так как для произвольного топологического пространства Z справедливо неравенство $nw(Z_\lambda) \leqslant nw(Z)^\lambda$, то и $nw((F^{n_0}_{\alpha_0})_{\aleph_0}) \leqslant 2^{\tau\mu}$. Поэтому найдётся $\tilde{\gamma} \subseteq \gamma$, покрывающее $F^{n_0}_{\alpha_0}$, для которого $|\tilde{\gamma}| \leqslant 2^{\tau\mu}$. Положим $\gamma_{\alpha_0} = \bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\} \cup \tilde{\gamma}$. Итак, построены множества F_α и семейства γ_α, $\alpha < (\mu\tau)^+$, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3. Положим $F = \bigcup\{F_\alpha\colon \alpha < (\mu\tau)^+\}$. Так как $t(X) = \mu$, то в силу условия 1 множество F замкнуто в X. Покажем, что $\bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < (\mu\tau)^+\}$ покрывает X^{n_0}. Предположим противное, т. е. $X^{n_0} \setminus \bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < (\mu\tau)^+\} \neq \varnothing$. Так как $F^{n_0} = \bigcup\{F_\alpha^{n_0}\colon \alpha < (\mu\tau)^+\}$, то $\bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < (\mu\tau)^+\}$ покрывает F^{n_0} в силу условия 2. Так как $l(F^{n_0}) \leqslant t(C_p(X)) = \tau$, то найдётся такое подсемейство $U \subseteq \bigcup\{B(T)\colon T \in \bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < (\mu\tau)^+\}\}$, $|U| \leqslant \tau$, что $F^{n_0} \subseteq \bigcup U$ и $X^{n_0} \setminus \bigcup U \neq \varnothing$. В силу того что $|U| \leqslant \tau$, $U \subseteq \bigcup\{B(T)\colon T \in \bigcup\{\gamma_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}\}$ для некоторого $\alpha_0 < (\mu\tau)^+$. Но тогда в силу условия 3 $F_{\alpha_0}^{n_0} \setminus \bigcup U \neq \varnothing$. Это противоречит тому, что $F^{n_0} \subseteq \bigcup U$. Теорема доказана.

Напомним, что пространство X называется финально компактным Σ-пространством [28], если оно представимо как непрерывный образ финально компактного перистого пространства. Класс финально компактных Σ-пространств замкнут относительно счётных произведений и включает в себя класс K-аналитических пространств.

Следствие 1.2. *Пусть X — финально компактное Σ-пространство. Тогда $t(B_1(X)) \leqslant \exp t(X)$.*

Следствие 1.3. *Пусть X — тихоновское пространство со счётной теснотой. Тогда $t(C_p(X)) \leqslant t(B_1(X)) \leqslant \exp t(C_p(X))$.*

Теорема 1.4. *Пусть X — компакт, $F \subseteq B(X)$ — компакт. Тогда $t(F) \leqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Пусть $f_0 \in F$. Докажем, что $t(f_0, F) \leqslant \mathfrak{c}$. Без ограничения общности считаем далее, что $f_0 \equiv 0$. Покажем, что для доказательства теоремы достаточно установить следующее.

I. Пусть $f_0 \in M \subseteq B(Y)$, M и Y — компакты, $f_0 \equiv 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое $M_\varepsilon \subseteq M$, что $|M_\varepsilon| \leqslant \mathfrak{c}$ и для всякой точки $x \in Y$ $\inf\{|f(x)|\colon X \in M_\varepsilon\} < \varepsilon$.

Действительно, пусть утверждение I справедливо. Нетрудно проверить, что отображение $\psi\colon B(Y) \to B(Y^n)$, заданное правилом $\psi(f)(y_i)_{i=1}^n = \max\{|f(y_i)|\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $(y_i)_{i=1}^n \in Y^n$, непрерывно. Следовательно, $\psi(M) \subseteq B(Y^n)$ — компакт и $f_0 = \psi f_0 \in \psi(M)$. В силу утверждения I для всякого $m \in \mathbb{N}$ найдётся такое $M_{nm} \subseteq M$, что $|M_{nm}| \leqslant \mathfrak{c}$ и для всякой точки $(y_i)_{i=1}^n \in Y^n$ найдётся функция $f \in M_{nm}$, для которой $\max\{|f(y_i)|\colon 1 \leqslant i \leqslant n\} < 1/m$. Тогда непосредственно проверяется, что $f_0 \in \overline{\bigcup\{M_{nm}\colon n, m \in \mathbb{N}\}}$. Предположим, что $t(f_0, F) > \mathfrak{c}$. Тогда $F \setminus \{f_0\}$ $\mathfrak{c}$-компактно.

II. Для всякого $A \subseteq X$, $|A| \leqslant \mathfrak{c}$, найдётся такая функция $f \in F \setminus \{f_0\}$, что $f(A) = 0$.

Действительно, отображение сужения $\pi_A\colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^A$ непрерывно и $w(\mathbb{R}^A) \leqslant \mathfrak{c}$. Множество $F \setminus \{f_0\}$ $\mathfrak{c}$-компактно, следовательно, $\mathfrak{c}$-компактно и множество $\pi_A(F \setminus \{f_0\})$. Но $w(\pi_A(F_0 \setminus \{f_0\})) \leqslant \mathfrak{c}$, следовательно, $\pi_A(F_0 \setminus \{f_0\})$ — компакт и тогда $f_0|_A \in \pi_A(F \setminus \{f_0\})$. Этим утверждение II доказано.

Переходим к доказательству утверждения I. Для всякой функции $f \in F$ положим $O(f) = f^{-1}(\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда множество $O(f)$ бэровское в X и потому счётно выделяемое (подробнее об этих множествах см. в § 3) в X, т. е. найдётся такое счётное семейство $\gamma(f)$ открытых множеств, что для всяких $x \in O(f)$ и $y \notin O(f)$ найдётся $U \in \gamma(f)$, $x \in U$, $y \notin U$. По трансфинитной индукции построим счётно компактные множества $X_\alpha \subseteq X$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, и выберем такие функции $f_\alpha \in F \setminus \{f_0\}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, что выполнены следующие условия.

1. $|X_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$, $X_\alpha \subseteq X_\beta$ для всяких $\alpha < \beta < \omega_1$.

2. $f_\alpha(X_\alpha) = 1$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

3. Для всякого конечного подсемейства $U \subseteq \bigcup\{\gamma(f_\alpha)\colon \alpha < \beta\}$, для которого выполнено $\bigcup\{X_\alpha\colon \alpha < \beta\} \subseteq \bigcup U$ и $X \setminus \bigcup U \neq \varnothing$, выполнено $X_\beta \setminus \bigcup U \neq \varnothing$, $1 < \beta < \omega_1$.

Пусть $X_1 = \{x_1\}$, где $x_1 \in X$ — произвольная точка, и функция $f_1 \in F \setminus \{f_0\}$ такова, что $f_1(x_1) = 0$. Пусть $\beta > 1$, и предположим, что для всех $\alpha < \beta$ построены множества X_α и выбраны функции f_α, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3. Положим $B = \bigcup\{\gamma(f_\alpha)\colon \alpha < \beta\}$, $\mathcal{P} = \bigl\{U\colon U \subseteq B,\ |U| < \aleph_0,\ \bigcup\{X_\alpha\colon \alpha < \beta\} \subseteq \bigcup U$ и $X \setminus \bigcup U \neq \varnothing\bigr\}$. Пусть $\tilde{\mathcal{P}}$ — множество, полученное выбором для всякого $U \in \mathcal{P}$ точки в $X \setminus \bigcup U$. Заметим, что $|\tilde{\mathcal{P}}| \leqslant \mathfrak{c}$, следовательно, мощность множества $Z = \bigcup\{X_\alpha\colon \alpha < \beta\} \cup \tilde{\mathcal{P}}$ также не превосходит $\mathfrak{c}$. Множество X_β — счётно компактное подмножество X, содержащее Z и мощности $\leqslant \mathfrak{c}$. Так как $|X_\beta| \leqslant \mathfrak{c}$, то в силу утверждения II выберем функцию $f_\beta \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$, такую что $f_\beta(X_\beta) = 0$. Итак, построены множества X_α, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, и выбраны функции $f_\alpha \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3. Положим $\tilde{X} = \bigcup\{X_\alpha\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}$. Тогда $\tilde{X}$ счётно компактно. Пусть $\tilde{f}$ — точка полного накопления множества $\{f_\alpha\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}$. Так как $\mathcal{F} \setminus \{f_0\}$ $\mathfrak{c}$-компактно, то $\tilde{f} \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$ и $\tilde{f}(\tilde{X}) = 0$. Покажем, что $\bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\} \supseteq O(\tilde{f})$. Действительно, если $x \notin \bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}$, то $|f_\alpha(x)| \geqslant \varepsilon$ для всех α, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, и так как $\tilde{f}$ — точка полного накопления $\{f_\alpha\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}$, то и $|\tilde{f}(x)| \geqslant \varepsilon$, т. е. $x \notin O(\tilde{f})$. Так как $O(\tilde{f}) \supseteq \tilde{X}$ и бэровские множества открыто-замкнуты в $X_{\aleph_0}$, то $\bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\} \supseteq O(\tilde{f}) \supseteq [\tilde{X}]_{\aleph_0}$. По предположению $\bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\} \neq X$. Пусть $y_0 \in X \setminus \bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}$. Для всякой точки $x \in O(f_\alpha)$ выберем открытое множество $U(x) \in \gamma(f_\alpha)$, такое что $x \in U(x)$, $y_0 \notin U(x)$. Тогда $\gamma = \{U(x)\colon x \in \bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}\}$ — открытое покрытие $\bigcup\{O(f_\alpha)\colon 1 \leqslant \alpha < \omega_1\}$.

Далее потребуется такое утверждение.

III. Пусть L — компактное пространство, $M \subset L$ счётно компактно и γ — семейство открытых в L множеств, покрывающее $[M]_{[L]_{\aleph_0}}$. Тогда γ содержит конечное подсемейство, покрывающее M.

Докажем утверждение III. Предположим противное. Пусть $\mathcal{F}$ — максимальное центрированное семейство замкнутых в M множеств, содержащее $\mathcal{F}_0 = \{M \setminus \bigcup\mu\colon \mu \subset \gamma$ и μ конечно$\}$. Пусть $y \in \bigcap\{\overline{F}\colon F \in \mathcal{F}\}$. Ясно, что $y \in L \setminus \bigcup\gamma$. Тогда $y \notin [M]_{[L]_{\aleph_0}}$, следовательно, найдётся G_δ-множество E, $y \in E$ и $E \cap M = \varnothing$. Пусть $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, где V_n открыто в L, $n \in \mathbb{N}$. Так как $\mathcal{F}$ максимально, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое $F_n \in \mathcal{F}$, что $F_n \in V_n$. Но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \subset L \setminus M$. Следовательно, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$, что противоречит счётной компактности M. Этим утверждение III доказано.

Из III следует, что найдётся конечное подсемейство $\mathcal{U} \subset \gamma$, покрывающее $\tilde{X}$. Тогда $\mathcal{U} \subset \bigcup\{\gamma(f_\alpha) \colon \alpha < \alpha_0\}$ для некоторого $\alpha_0 < \omega_1$. Но $X \setminus \bigcup\mathcal{U} \neq \varnothing$, а $X_{\alpha_0} \setminus \bigcup\mathcal{U} = \varnothing$. Это противоречит свойству 3. Таким образом, доказано утверждение I, а вместе с ним и теорема.

Компакты, гомеоморфные компактному подпространству пространства $B_1(X)$, где X — сепарабельное пространство, метризуемое полной метрикой, называются компактами Розенталя. Эти компакты рассматривались Розенталем в связи с исследованием сепарабельных банаховых пространств, не содержащих изоморфную копию l_1.

В частности, Розенталь доказал, что такие компакты имеют счётную тесноту [31, 32]. Затем Бурген, Фремлин и Талагран [17] доказали аналог теоремы Гротендика из C_p-теории [4].

Теорема 1.5 ([17]). *Пусть X — сепарабельное пространство, метризуемое полной метрикой, $A \subset B_1(X)$ и A относительно счётно компактно в $B_1(X)$. Тогда замыкание множества A в $B_1(X)$ является компактом.*

Кроме того, в этой же работе [17] доказано, что компакты Розенталя являются компактами Фреше—Урысона.

Бурген [16] доказал, что всякий компакт Розенталя содержит точки, в которых выполняется первая аксиома счётности. Заметим, что в определении компактов Розенталя можно считать X произвольным аналитическим пространством или пространством иррациональных чисел, но нельзя считать, что $X = K$, где K — канторово совершенное множество, так как Р. Роль [29] показал, что существует компакт Розенталя, который нельзя вложить в $B_1(K)$.

В [10] рассматривается более общая ситуация, когда X — K-аналитическое пространство. Напомним, что топологическое пространство Y называется сильно счётно компактным, если замыкание всякого счётного множества $S \subset Y$ — компакт.

Теорема 1.6 ([10]). *Пусть X — K-аналитическое пространство, $A \subset B_1(X)$ относительно счётно компактно в $B_1(X)$. Тогда $\overline{A} = \bigcup\{\overline{S} \colon S \subset A$ и S счётно$\}$ и $\overline{A}$ является сильно счётно компактным пространством Фреше—Урысона.*

Следствие 1.7 ([10]). *Пусть X — K-аналитическое пространство, $A \subset B_1(X)$ — счётно компактное подпространство. Тогда A замкнуто в $B_1(X)$.*

Следствие 1.8 ([10]). *Пусть X — K-аналитическое пространство, $A \subset B_1(X)$ — компакт. Тогда A — пространство Фреше—Урысона, обладающее плотным множеством точек, в которых выполняется первая аксиома счётности.*

Приведём ещё один результат в этом направлении.

Теорема 1.9 ([10]). *Пусть X — K-аналитическое пространство, $A \subset B_1(X)$ — $\aleph_1$-компактное подмножество. Тогда A — компакт.*

Обозначим через B_1 класс компактов, содержащихся в $B_1(X)$, где X — K-аналитическое пространство. Тогда класс B_1, помимо компактов Розенталя, содержит и компакты Корсона. Это следует из того, что Σ-произведение прямых веса τ содержится в $B_1(A(\tau))$, где $A(\tau)$ — александровская компактификация дискрета мощности τ. Стандартно показывается, что класс B_1 счётно мультипликативен и, если $X \in B_1$, $S \subset X$ и S счётно, то $\overline{S}$ — компакт Розенталя. Отсюда и из результата Годфруа [21] следует, что непрерывный образ компакта из B_1 не обязательно принадлежит B_1.

В теореме 1.6 в отличие от теоремы 1.5 не утверждается, что относительно счётно компактное подмножество в $B_1(X)$, где X — K-аналитическое пространство, относительно компактно. Следующий результат проясняет эту ситуацию.

Теорема 1.10 ([10]). *Пусть X — регулярное K-аналитическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *замыкание всякого относительно счётно компактного подмножества в $B_1(X)$ компактно,*
2) *$B_1(X)$ не содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное ω_1,*
3) *$B_1(X)$ не содержит подмножество, гомеоморфное ω_1,*
4) *X совершенно нормально.*

Известно, что если $B_1(X)$ — q-пространство, то замыкание всякого относительно счётно компактного подмножества в $B_1(X)$ — компакт.

Теорема 1.11. *Пусть X — регулярное K-аналитическое пространство счётной тесноты. Тогда $B_1(X)$ — q-пространство тогда и только тогда, когда X совершенно нормально.*

Для доказательства нам потребуется следующий результат.

Лемма 1.12 ([9]). *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда $B_1(X)$ — q-пространство тогда и только тогда, когда для всякой функции $f \in \mathbb{R}^X \setminus B_1(X)$ найдётся такое счётное множество $S \subseteq X$, что для всякой $\varphi \in B_1(X)$ выполнено $\varphi|_S \neq f|_S$.*

Доказательство. Пусть X не совершенно нормально. Тогда в силу теоремы 1.10 найдётся замкнутое множество $F \subseteq B_1(X)$, гомеоморфное ω_1, следовательно, $\bar{F}^{\mathbb{R}^X} = F \cup \{\Theta\}$ гомеоморфно $\omega_1 + 1$. Для всякого счётного множества $S \subseteq X$ $\{f\colon f|_S = \Theta|_S\}$ — G_δ-множество, содержащее Θ и пересекающее F. В силу леммы 1.12 $B_1(X)$ не q-пространство.

Пусть теперь X совершенно нормально. Для всяких $A, B \subseteq X$, которые не отделимы F_σ-множествами в X, положим $\mathcal{F}(A,B) = \{Z\colon Z$ — F_σ-множество в X и $Z \cap A$, $Z \cap B$ не отделимы F_σ-множествами в $X\}$, $\mathcal{F}_1(A,B) = \{Z\colon$ всякое непустое относительно открытое множество $U \subseteq Z$ принадлежит семейству $\mathcal{F}(A,B)\}$, $U(A,B) = \{Z\colon Z$ — F_σ-множество в X, $Z \notin \mathcal{F}(A,B)\}$.

1. Пусть $A, B \subseteq X$, $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n замкнуто в X, $n \in \mathbb{N}$. Если для всякого $n \in \mathbb{N}$ множества $A \cap F_n$ и $B \cap F_n$ отделимы F_σ-множествами в X, то $Z \cap A$ и $Z \cap B$ также отделимы F_σ-множествами в X.

Действительно, пусть A_n, B_n — дизъюнктные F_σ-множества, $A \cap F_n \subseteq A_n$, $B \cap F_n \subseteq B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$T = (A_1 \cap F_1) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \biggl((A_n \cap F_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \biggr),$$

$$M = (B_1 \cap F_1) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \biggl((B_n \cap F_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-2} F_i \biggr).$$

Так как X совершенно нормально, то T и M — F_σ-множества в X. Непосредственно проверяется, что $Z \cap A \subseteq T$, $Z \cap B \subseteq M$ и $T \cap M = \varnothing$.

Для всякого F_σ-множества $Z \subseteq X$ положим $U(Z) = \bigcup\{V : V$ открыто в Z и $V \in U(A,B)\}$.

2. Для всякого F_σ-множества $Z \subseteq X$ выполнено $U(Z) \in U(A,B)$. Действительно, так как X наследственно финально компактно, то $U(Z) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, где $V_n \in U(A,B)$. По пункту 1 $U(Z) \in U(A,B)$.

Из совершенной нормальности X и пунктов 1 и 2 непосредственно вытекают следующие утверждения.

3. Если $Z \in \mathcal{F}(A,B)$, то $\tilde{Z} = Z \setminus U(Z) \in \mathcal{F}_1(A,B)$.

4. Если Z_n — F_σ-множество, $n \in \mathbb{N}$, $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n \in \mathcal{F}(A,B)$, то найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $Z_{n_0} \in \mathcal{F}(A,B)$.

5. Если Z_n — F_σ-множество, $n \in \mathbb{N}$, $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n \in \mathcal{F}_1(A,B)$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{Z}_n$ плотно в Z.

Выберем $f \in \mathbb{R}^X \setminus B_1(X)$. Нетрудно проверить, что найдутся такие $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$, что $X \in \mathcal{F}(B_p(f), B^q(f))$, где $B_p(f) = \{x \colon f(x) \leqslant p\}$, $B^q(f) = \{x \colon f(x) \geqslant q\}$. Для доказательства теоремы достаточно установить справедливость следующего утверждения.

6. Найдутся $p', q' \in \mathbb{R}$, $p' < q'$, и счётные множества $S_{p'} \subseteq B_{p'}(f)$, $S^{q'} \subseteq B^{q'}(f)$, не отделимые G_δ-множествами в X.

Действительно, если утверждение 6 справедливо, то положим $S = S_{p'} \cup S^{q'}$, и пусть $\varphi|_S = f|_S$. Тогда $S_{p'} \subseteq B_{p'}(\varphi)$ и $S^{q'} \subseteq B^{q'}(\varphi)$. Если $\varphi \in B_1(X)$, то $B_{p'}(\varphi)$ и $B^{q'}(\varphi)$ — G_δ-множества, и притом дизъюнктные. Следовательно, $\varphi \notin B_1(X)$.

В силу леммы 2.1 (§ 2) найдутся полное по Чеху наследственно финально компактное пространство Y и непрерывное отображение $\pi \colon T \xrightarrow{\text{на}} X$. Существует две возможности.

а) Найдутся такие $p', q' \in \mathbb{R}$, что $p \leqslant p' < q' \leqslant q$ и $Y \in \mathcal{F}(\pi^{-1}(B_{p'}(f)), \pi^{-1}(B^{q'}(f)))$. Тогда $\tilde{Y} \in \mathcal{F}_1(\pi^{-1}(B_{p'}(f)), \pi^{-1}(B^{q'}(f)))$ замкнуто, $\tilde{Y} \neq \varnothing$ и $\tilde{Y} \cap \pi^{-1}(B_{p'}(f))$, $\tilde{Y} \cap \pi^{-1}(B^{q'}(f))$ всюду плотны в $\tilde{Y}$. Так как Y с первой аксиомой счётности, то по индукции легко построить такие счётные множества $P \subseteq \tilde{Y} \cap \pi^{-1}(B_{p'}(f))$ и $M \subseteq \tilde{Y} \cap \pi^{-1}(B_{q'}(f))$, что $\overline{P} = \overline{M}$. Так как Y полно по Чеху, то P и M не отделяются G_δ-множествами в $\overline{P} = \overline{M}$, следовательно, и в Y. Тогда $\pi(P) \subseteq B_{p'}(f)$ и $\pi(M) \subseteq B_{q'}(f)$ — счётные множества, не отделимые G_δ-множествами. Утверждение 6 справедливо, следовательно, теорема доказана.

б) Пусть для всяких $p', q' \in \mathbb{R}$, $p \leqslant p' < q' \leqslant q$, выполняется

$$Y \notin U(\pi^{-1}(B_{p'}(f)), \pi^{-1}(B^{q'}(f))).$$

Покажем, что тогда множества $B_p(f)$ и $B^q(f)$ являются K-аналитическими. Для всякого $n \in \mathbb{N}$, $q - 1/n > p$, зафиксируем такое F_σ-множество $T_n \subseteq Y$, что $T_n \cap \pi^{-1}(B_{q-1/n}(f)) = \varnothing$ и $T_n \supseteq \pi^{-1}(B^q(f))$. Тогда $\pi(T_n)$ — K-аналитическое множество, следовательно, $B^q(f) = \bigcap\{\pi(T_n)\colon n > \frac{1}{q-p}\}$ — K-аналитическое множество. Аналогично доказывается K-аналитичность $B_p(f)$. Так как множества $B_p(f)$ и $B^q(f)$ являются K-аналитическими, то найдутся такие замкнутые в X множества $F_{n_1\ldots n_k}$, $\Phi_{n_1\ldots n_k}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{n_1\ldots n_k n} = F_{n_1\,\ldots\,n_k}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_{n_1\ldots n_k n} = \Phi_{n_1\ldots n_k}$. Заметим, что

$$\bigcup_{\tilde p}\biggl\{\bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_1\ldots n_k}\colon \tilde p = (n_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\biggr\} = B_p(f),$$

$$\bigcup_{\tilde p}\biggl\{\bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_{n_1\ldots n_k}\colon \tilde p = (n_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\biggr\} = B^q(f),$$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{n_1\ldots n_k} = Z(\tilde p)$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_{n_1\ldots n_k} = L(\tilde p)$ — непустые компакты и $\{F_{n_1\ldots n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — сеть $Z(\tilde p)$, $\{\Phi_{n_1\ldots n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — сеть $Z(\tilde p)$ для всякого $\tilde p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Так как

$$\bigcap_{n_1=1}^{\infty} F_{n_1} \cup \bigcap_{n_1=1}^{\infty} \Phi_{n_1} \supseteq B_p(f) \cup B^q(f),$$

то по утверждению 1 найдётся либо $F_{n_0} \in \mathcal{F}(B_p(f), B^q(f))$, либо $\Phi_{m_0} \in \mathcal{F}(B_p(f), B^q(f))$. Пусть для определённости $F_{n_0} \in \mathcal{F}(B_p(f), B^q(f))$. Тогда $\tilde F_{n_0} \in \mathcal{F}_1(B_p(f), B^q(f))$. По индукции, используя утверждение 5, построим замкнутые множества $F'_{n_1\ldots n_k}$, $n_i \in \mathbb{N}_i \subseteq \mathbb{N}$, для которых выполнено следующее утверждение.

7. $F'_{n_1} \subseteq \tilde F_{n_0} \cap F_{n_0 n_1}$, $n_1 \in \mathbb{N}_1$, $F'_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} \subseteq F'_{n_1\ldots n_k} \cap F_{n_0 n_1\ldots n_{k+1}}$, $n_i \in \mathbb{N}_i$, $F'_{n_1\ldots n_k} \in \mathcal{F}_1(B_p(f), B^q(f))$ и $\bigcup\{F'_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\colon n_{k+1} \in \mathbb{N}_{k+1}\}$ плотно в $F'_{n_1\ldots n_k}$.

Следующая задача — построить непустые счётные множества $S_p \subseteq B_p(f)$ и $S^q \subseteq B^q(f)$, для которых выполнено утверждение 8.

8. $\overline{S_p \cap F'_{n_1\ldots n_k}} = \overline{S_q \cap F'_{n_1\ldots n_k}}$, $n_i \in \mathbb{N}_i$, $k \in \mathbb{N}$, и $\bigcup\{S_p \cap F'_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}\colon n_{k+1} \in \mathbb{N}_{k+1}\}$ плотно в $S_p \cap F'_{n_1\ldots n_k}$, $n_i \in \mathbb{N}_i$, $k \in \mathbb{N}$.

Для этого потребуется простое замечание.

9. Пусть X — пространство счётной тесноты, $C, \mathcal{D} \subseteq X$, $\overline{C} = \overline{\mathcal{D}}$, $C_1 \subseteq C$, $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}$ и C_1, $\mathcal{D}_1$ — счётные множества. Тогда найдутся такие счётные множества $C_2 \supseteq C_1$, $\mathcal{D}_2 \supseteq \mathcal{D}_1$, что $\overline{C}_2 = \overline{\mathcal{D}}_2$, $C \supseteq C_2$, $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{D}_2$.

Для доказательства соотношений 8 расположим множества $F'_{n_1\ldots n_k}$, $n_i \in \mathbb{N}_i$, $k \in \mathbb{N}$, в последовательность $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что всякое множество $F'_{n_1\ldots n_k}$ встречается в последовательности бесконечно много раз. Теперь построим по индукции счётные множества $C_n \subseteq B_p(f)$, $\mathcal{D}_n \subseteq B^q(f)$, $C_n \subseteq C_{n+1}$, $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{n+1}$,

$n \in \mathbb{N}$. Пусть $C_0 \subseteq B_p(f)$, $\mathcal{D}_0 \subseteq B^q(f)$ — произвольные счётные множества. Предположим, что построены множества C_i, $\mathcal{D}_i$, $i \leqslant n$. Множество L_{n+1} имеет вид $F'_{n_1\ldots n_k}$. Тогда $F'_{n_1\ldots n_k} \cap B_p(f)$ и $F'_{n_1\ \ldots\ n_k} \cap B^q(f)$ плотны в $F'_{n_1\ldots n_k}$ по утверждению 7. Следовательно, по утверждению 9 найдутся непустые счётные множества C'_n, $\mathcal{D}'_n$, $C'_n \subseteq F'_{n_1\ \ldots\ n_k} \cap B_p(f)$, $\mathcal{D}'_n \subseteq F'_{n_1\ \ldots\ n_k} \cap B^q(f)$ и $\mathcal{D}_n \cap F'_{n_1\ \ldots\ n_k} \cap B_q(f) \subseteq \mathcal{D}'_n$.

По утверждению 7 $\bigcup\{F'_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} : n_{k+1} \in \mathbb{N}_{k+1}\} \cap B_p(f)$ плотно в $F'_{n_1\ldots n_k} \cap \cap B_p(f)$. Тогда по утверждению 9 найдётся счётное множество C''_n, $C''_n \supseteq \supseteq F'_{n_1\ldots n_k} \cap (C_n \cup C'_n)$, $C''_n \subset B_p(f) \cap F'_{n_1\ldots n_k}$ и

$$\overline{C''_n \cap \bigcup\{F'_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} : n_{k+1} \in \mathbb{N}_{k+1}\}} = \overline{C''_n \cap F'_{n_1\ldots n_k}}.$$

Полагаем $C_{n+1} = C_n \cup C'_n \cup C''_n$, $\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n \cup \mathcal{D}'_n$. Нетрудно убедиться в том, что множества $S_p = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, $S^q = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$ удовлетворяют соотношениям 8. Покажем теперь, что счётные множества S_p и S^q не отделяются G_σ-множествами в X. Предположим противное. Пусть $S_p \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, $S^q \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n$, где множества V_n, W_n, $n \in \mathbb{N}$, открыты в X. Выберем $n_i^0 \in \mathbb{N}_i$, непустые открытые множества O_k в $F'_{n_1^0\ldots n_k^0} \cap S_p$, такие что $O_{k+1} \subseteq (O_k \cap W_k \cap V_k) \cap S_p \cap F'_{n_1^0\ldots n_{k+1}^0}$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $n_1^0 \in \mathbb{N}_1$ произвольно. Тогда $\overline{S_p \cap F'_{n_1^0}} = \overline{S^q \cap F_{n_1^0}}$. Следовательно, $(W_1 \cap V_1) \cap \overline{(S_p \cap F'_{n_1^0})}$ всюду плотно и открыто в $S_p \cap F'_{n_1^0}$. По утверждению 7 найдётся такое $n_2^0 \in \mathbb{N}_2$, что $(W_1 \cap V_1) \cap (S_p \cap F'_{n_1^0 n_2^0}) \neq \varnothing$. Пусть $\overline{O}_2 \subseteq (W_1 \cap V_1) \cap \overline{S_p \cap F'_{n_1^0 n_2^0}}$, где O_2 — непустое относительно открытое в $\overline{S_p \cap F'_{n_1^0 n_2^0}} = \overline{S^q \cap F'_{n_1^0 n_2^0}}$ множество. Аналогично строим O_k, $k > 2$. Покажем, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} O_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{O}_k \neq \varnothing$. Действительно, $\overline{O}_k \subseteq F'_{n_1^0\ldots n_k^0} \subseteq F_{n_1^0\ldots n_k^0}$ и $\overline{O}_{k+1} \subseteq O_k$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{n_1^0\ldots n_k^0}$ — компакт, то если $\overline{O}_k \cap E \neq \varnothing$ для всякого $k \in \mathbb{N}$, то и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{O}_k \neq \varnothing$. Но если $\overline{O}_{k_0} \cap E = \varnothing$, то найдётся некоторое $F_{n_1^0\ldots n_m^0}$, не пересекающееся с $\overline{O}_{k_0}$. Но тогда $\overline{O}_m \subseteq F_{n_1^0\ldots n_m^0}$ и $\overline{O}_m \cap \overline{O}_{k_0} = \varnothing$. Противоречие. По построению $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (W_k \cap V_k) \supseteq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{O}_k \neq \varnothing$.

Таким образом, по утверждению 6 и лемме 1.12 $B_1(X)$ — q-пространство. Теорема доказана.

Следствие 1.13. *Пусть X — полное по Чеху финально компактное пространство. Тогда $B_1(X)$ — q-пространство тогда и только тогда, когда X совершенно нормально.*

Доказательство. Очевидно, что если X — тихоновское пространство и $B_1(X)$ — q-пространство, то X совершенно нормально. Совершенная нормальность X необходима для тихоновского пространства X. Если же X совершенно нормально, то псевдохарактер X счётен, и так как X полно по Чеху, то и характер X счётен [5]. Тогда в силу теоремы 1.11 $B_1(X)$ — q-пространство.

Следствие 1.14 (MA + ¬CH). *Пусть X — регулярное K-аналитическое пространство. Тогда $B_1(X)$ — q-пространство тогда и только тогда, когда X совершенно нормально.*

Доказательство. Достаточно проверить, что при условиях следствия теснота X счётна. Это вытекает из теоремы 1.11 и следующих фактов: 1) в предположении MA + ¬CH совершенно нормальный компакт наследственно сепарабелен [33], 2) в предположении MA + ¬CH K-аналитическое пространство наследственно сепарабельно, если всякий компакт, лежащий в нём, наследственно сепарабелен [19].

§ 2. О теоремах Н. Н. Лузина и Зальцвассера

Следуя [7], будем называть последовательность множеств $\{P_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ предельно возрастающей, если $P_\alpha \subseteq P_\beta$, $\alpha < \beta < \omega_1$, и $P_\gamma = \bigcup\{P_\alpha\colon \alpha < \gamma\}$ для всякого предельного $\gamma < \omega_1$. Если найдётся такое $\alpha_0 < \omega_1$, что $P_\alpha = P_{\alpha_0}$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$, то говорят, что последовательность стационарна. Из теоремы 1.10 следует, что если X — совершенно нормальное K-аналитическое пространство, то X не содержит предельно возрастающую последовательность $\{P_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$, состоящую из F_σ- и G_δ-множеств (иначе $\{\chi_{P_\alpha}\colon \alpha < \omega_1\} \subset B_1(X)$ гомеоморфно ω_1, где χ — характеристическая функция).

Лемма 2.1 ([23]). *Всякое K-аналитическое пространство X является непрерывным образом финально компактного полного по Чеху пространства $Y \subset X \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ — пространство иррациональных чисел.*

Замечание. Так как произведение наследственно финально компактного (наследственно сепарабельного) пространства на пространство со счётной базой наследственно финально компактно (наследственно сепарабельно), то если X наследственно финально компактно или наследственно сепарабельно, то и $Y \subseteq X \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ в лемме 2.1 такое же.

С другой стороны, Н. Н. Лузин [7] доказал следующее утверждение.

Теорема B. *Пусть X — аналитическое пространство. Тогда всякая предельно возрастающая последовательность множеств $\{P_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$, состоящая из G_δ-множеств, стационарна.*

Справедливо обобщение этого результата.

Теорема 2.2. *Пусть X — совершенно нормальное K-аналитическое пространство. Тогда всякая предельно возрастающая последовательность множеств $\{P_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$, где P_α — G_δ-множество, $0 \leqslant \alpha < \omega_1$, стационарна.*

Доказательство. В силу сделанного выше замечания считаем, что X — совершенно нормальное финально компактное полное по Чеху пространство.

Предположим, что найдётся $\{P_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ — предельно возрастающая нестационарная последовательность G_δ-множеств. Положим $P = \bigcup\{P_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$, $\mathcal{J}_0 = \{A\colon A \subseteq X$ и $P_{\alpha_0} \cap A = P \cap A$ для некоторого $\alpha_0 < \omega_1\}$, $\mathcal{F}_0 = \{A\colon A \subseteq X,\ A \notin \mathcal{J}_0\}$, $\mathcal{F}_1 = \{F\colon F \subseteq X$ замкнуто и всякое непустое открытое в F множество U принадлежит $\mathcal{F}_0\}$.

1. Непосредственно проверяется, что если $A_i \in \mathcal{J}_0$, $i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{J}_0$.

Для всякого $A \subseteq X$ определим $U(A) = \bigcup\{U\colon U \subseteq A$ открыто в A и $U \in \mathcal{J}_0\}$. В силу наследственной финальной компактности X и утверждения 1 справедливо $U(A) \in \mathcal{J}_0$. Положив $F(A) = A \setminus U(A)$, получим замкнутое в A множество.

2. Если $A \in \mathcal{F}_0$ (и A замкнуто), то и $F(A) \in \mathcal{F}_0 (F(A) \in \mathcal{F}_1)$. Действительно, если $A \in \mathcal{F}_0$, а $F(A) \notin \mathcal{F}_0$, то $U(A)$ и $F(A)$ принадлежат $\mathcal{J}_0$ и по утверждению 1 справедливо $A = U(A) \cup F(A) \in \mathcal{J}_0$. Пусть $A \in \mathcal{F}_0$ замкнуто. Тогда $F(A)$ замкнуто. Пусть найдётся такое открытое в $F(A)$ множество V, $\varnothing \neq V \subseteq F(A)$, что $V \in \mathcal{J}_0$. Но тогда $W = U(A) \cup V$ открыто в A и по утверждению 1 $W \in \mathcal{J}_0$. Следовательно, $W \subseteq U(A)$. Противоречие.

3. Пусть $F \in \mathcal{F}_1$ и $\alpha < \omega_1$. Тогда найдутся такие $\Phi_n \in \mathcal{F}_1$, $n \in \mathbb{N}$, что $\Phi_n \cap P_\alpha = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ плотно в F. Действительно, так как P_α — G_δ-множество, то $F \setminus P_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n замкнуто и $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. По утверждению 1 найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $A_n \in \mathcal{F}_0$, $n \geqslant n_0$. Положим $\Phi_n = F(A_{n_0+n})$, $n \in \mathbb{N}$. По утверждению 2 $\Phi_n \in \mathcal{F}_1$. Покажем, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ плотно в F. Предположим противное. Тогда найдётся такое непустое открытое в F множество V, что $V \cap \Bigl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n\Bigr) = \varnothing$. В этом случае $V \subseteq P_\alpha \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_{n_0+n})$, и так как $P_\alpha \in \mathcal{J}_0$ и $\bigcup(A_{n_0+n}) \in \mathcal{J}_0$, $n \in \mathbb{N}$, то по утверждению 1 $V \in \mathcal{J}_0$. Это противоречит тому, что $F \in \mathcal{F}_1$.

4. Пусть $F \in \mathcal{F}_0$ замкнуто и $\overline{P \cap F} = F$. Тогда найдётся такое $\alpha_0 < \omega_1$, что $\operatorname{Int}_F \overline{(P_{\alpha_0} \cap F)} \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. $\operatorname{Int}_F \overline{(P_\alpha \cap F)} = \varnothing$ для всякого $\alpha < \omega_1$.

Построим по индукции последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \omega_1$, $n \in \mathbb{N}$, счётные семейства A_n компактов счётного характера в F, такие что $\Phi \in A_n$, $\Phi \subseteq (F \cap P_{\alpha_n}) \setminus (F \cap P_{\alpha_n - 1})$, $\Phi \neq \varnothing$ и всякая окрестность $O(F)$ содержит $\Phi' \in A_{n+1}$. Так как X точечно счётного типа, то найдётся такой компакт $\Phi_1 \neq \varnothing$ счётного характера в F, что $\Phi_1 \subseteq F \cap P_{\alpha_1}$, где $\alpha_1 < \omega_1$ таково, что $F \cap P_{\alpha_1} \neq \varnothing$. Положим $A_1 = \{\Phi_1\}$. Пусть построены α_i, A_i, $i \leqslant n$. Пусть $\Phi \in A_n$ и $\{O_m(\Phi)\}_{m=1}^{\infty}$ — база окрестностей Φ в F. Так как $\overline{P \cap F} = F$ и $O_m(\Phi) \setminus (P_{\alpha_n} \cap F) \neq \varnothing$, то для всякого $m \in \mathbb{N}$ найдутся $\beta_m(\Phi) < \omega_1$ и $x_m \in P_{\beta_m(\Phi)} \cap (O_m(\Phi) \setminus (P_{\alpha_n} \cap F))$. Тогда $x_m \in P_{\beta(\Phi)}$, где $\beta(\Phi) = \sup\{\beta_m(\Phi)\colon m \in \mathbb{N}\}$. Выберем такой компакт Φ_m счётного характера в F, что $x_m \in \Phi_m \subseteq P_{\beta_m} \cap (O_m(\Phi) \setminus (P_{\alpha_n} \cap F))$. Положим $\alpha_{n+1} = \sup\{\beta(\Phi)\colon \Phi \in A_n\}$, $A_{n+1} = \{\Phi_m\colon \Phi \in A_n,\ m \in \mathbb{N}\}$. Итак, построены α_n и A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $F \cap P_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (F \cap P_{\alpha_n})$ не является G_δ-множеством в F, где $\alpha = \sup \alpha_n$. Предположим противное. Тогда $F \cap P_\alpha = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$, где G_m открыто в F. Так как X полно по Чеху, то $X = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_m$, где $U_m \subseteq \beta X$ открыты. Построим по индукции такие открытые в F множества V_m, $m \in \mathbb{N}$, что $\overline{V}_m \cap P_{\alpha_m} = \varnothing$, $\overline{V}_{m+1} \subseteq V_m$, $\overline{V}_m \subseteq U_m$ и для всякого $m \in \mathbb{N}$ найдётся $F_{m+1} \in A_{m+1}$, $F_{m+1} \subseteq V_m \cap G_m$. Пусть построены V_i, $i \leqslant n$, и $F_{n+1} \subseteq V_n \cap G_n$, $F_{n+1} \in A_{n+1}$. Так как $F_{n+1} \cap \overline{P}_{\alpha_n} = \varnothing$ и F_{n+1} — компакт, то найдётся такая окрестность $O(F_{n+1})$ множества F_{n+1}, что $\overline{O(F_{n+1})} \cap \overline{P}_{\alpha_n} = \varnothing$, $\overline{O(F_{n+1})} \subseteq$ $\subseteq V_n \cap G_n$ и $\overline{O(F_{n+1})}^{\beta X} \subseteq U_{n+1}$. Положим $V_{n+1} = O(F_{n+1})$. Рассмотрим $T = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} V_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{V}_m \neq \varnothing$. Тогда $T \subseteq \bigcap\limits_{m+1}^{\infty} G_m = P_\alpha$. Но $V_m \cap P_{\alpha_m} = \varnothing$, следовательно, $T \cap \left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} P_{\alpha_m} \right) = \varnothing$. Противоречие. Утверждение 4 доказано.

5. Пусть $F \subseteq X$ замкнуто и $\overline{P \cap F} = F$. Тогда найдётся такое $\alpha_0 < \omega_1$, что $\overline{P_{\alpha_0} \cap F} = F$.

Рассмотрим $W = \bigcup \{V : V$ открыто в F и для некоторого $\alpha < \omega_1$ множество $P_\alpha \cap V$ плотно в $V\}$. В силу финальной компактности W найдётся такое $\alpha_0 < \omega_1$, что $P_{\alpha_0} \cap W$ плотно в W. Остаётся показать, что $\overline{W} = F$. Предположим противное. Тогда найдётся непустое открытое в F множество U, $U \subseteq \overline{U} \subseteq F \setminus \overline{W}$. Покажем, что $\overline{U} \in \mathcal{F}_{/}$. Действительно, иначе найдётся такое $\beta < \omega_1$, что $P \cap \overline{U} = P_\beta \cap \overline{U}$, и тогда $P_\beta \supseteq P \cap U$. Следовательно, $P_\beta \cap U$ плотно в U и $U \subseteq W$. Итак, $\overline{U} \in \mathcal{F}_0$. По утверждению 4 найдётся такое $\beta_1 < \omega_1$, что $\mathrm{Int}_{\overline{U}} \overline{(P_{\beta_1} \cap U)} \neq \varnothing$. Но тогда $\varnothing \neq V = U \cap \mathrm{Int}_{\overline{U}} \overline{(P_{\beta_1} \cap \overline{U})}$ открыто в F и $P_\beta \cap V$ плотно в V. Следовательно, $V \subseteq W$. Противоречие. Этим доказано утверждение 5.

6. Если $F \in \mathcal{F}_1$, то найдётся такое $\alpha < \omega_1$, что $\overline{P_\alpha \cap F} = F$. Действительно, из определения $\mathcal{F}_1$ следует, что $\overline{P \cap F} = F$. Остаётся сослаться на утверждение 5.

Пусть $F = F(X) \in \mathcal{F}_1$. По утверждению 6 найдётся такое P_{α_0}, что $\overline{F \cap P_{\alpha_0}} = F$. Из определения $\mathcal{F}_1$ следует, что $\mathrm{Int}_F (P_\alpha \cap F) = \varnothing$. По утверждению 3 найдутся такие $F_{n_1} \in \mathcal{F}_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, что $\bigcup\limits_{n_1=1}^{\infty} F_{n_1}$ плотно в F и $\bigcup\limits_{n_1=1}^{\infty} F_{n_1} \cap P_{\alpha_0} = \varnothing$. Построим теперь по индукции последовательность $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\alpha_i < \alpha_{i+1} < \omega_1$, и множества $F_{n_1 \ldots n_k} \in \mathcal{F}_1$, $n_i, k \in \mathbb{N}$, такие что

а) $F_{n_1 \ldots n_k n} \subseteq F_{n_1 \ldots n_k}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_{n_1 \ldots n_k n}$ плотно в $F_{n_1 \ldots n_k}$,

б) $\overline{P_{\alpha_k} \cap F_{n_1 \ldots n_k}} = F_{n_1 \ldots n_k}$,

в) $F_{n_1 \ldots n_k} \cap P_{\alpha_k} = \varnothing$.

Пусть построены такие α_i, $i < k$, $F_{n_1 \ldots n_k}$, что выполняются условия а), б), в). По утверждению 6 найдётся такое $\alpha(n_1 \ldots n_k) < \omega_1$, что $P_{\alpha(n_1 \ldots n_k)} \cap P_{n_1 \ldots n_k} =$ $= F_{\alpha(n_1 \ldots n_k)}$. Положим $\alpha_k = \sup \{\alpha(n_1 \ldots n_k) : n_i \in \mathbb{N},\ i \leqslant k\}$. По утверждению 3 найдутся такие $F_{n_1\dots n_k n} \in \mathcal{F}_1$, что выполняются условия а), в). Покажем теперь, что $P_\beta = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_{\alpha_n}$ не G_δ-множество, где $\beta = \sup \alpha_n$. Предположим противное. Пусть $P_\beta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$, где G_m открыто в X. Построим по индукции такие последовательности $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{n_m^0\}_{m=1}^{\infty}$, что $\overline{V}_{m+1} \subseteq V_m$, $\overline{V}_m^{\beta X} \subseteq U_m$, V_m — непустое открытое подмножество $F_{n_1^0\dots n_m^0}$ и $\overline{V}_m \subseteq F_{n_1^0\dots n_m^0} \cap G_m$. Поскольку $G_1 \supseteq P_{\alpha_0}$, $G_1 \cap F$ плотно и открыто в F. Так как $\bigcup\limits_{n_1=1}^{\infty} F_{n_1}$ также плотно в F, то найдётся такое n_1^0, что $G_1 \cap F_{n_1^0} \neq \varnothing$. Выберем в $F_{n_1^0}$ непустое открытое множество V_1, такое что $\overline{V}_1 \subseteq G_1 \cap F_{n_1^0}$ и $\overline{V}_1^{\beta X} \subseteq U_1$. Пусть построены V_i, $i \leqslant k$. Тогда $V_k \subseteq \overline{V}_k \subseteq G_k \cap F_{n_1^0\dots n_k^0}$, $G_{k+1} \supseteq P_\beta \supseteq P_{\alpha_k}$, следовательно, $G_{k+1} \cap F_{n_1^0\dots n_k^0}$ плотно в $F_{n_1^0\dots n_k^0}$ в силу б). Так как $\bigcup\limits_{n_{k+1}=1}^{\infty} F_{n_1^0\dots n_k^0 n_{k+1}}$ плотно в $F_{n_1^0\dots n_k^0}$, то найдётся такое n_{k+1}^0, что $G_{k+1} \cap V_k \cap F_{n_1^0\dots n_{k+1}^0} \neq \varnothing$. Выберем непустое открытое в $F_{n_1^0\dots n_{k+1}^0}$ множество V_{k+1}, такое что $V_{k+1} \subseteq \overline{V}_{k+1} \subseteq G_{k+1} \cap V_k \cap F_{n_1^0\dots n_{k+1}^0}$ и $\overline{V}_{k+1}^{\beta X} \subseteq U_{k+1}$. Итак, построены множества $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$. Имеем

$$\varnothing \neq T = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V}_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_k = P_\beta.$$

Но $V_{k+1} \subseteq F_{n_1^0\dots n_{k+1}^0}$, и в силу в) $V_{k+1} \cap P_{\alpha_k} = \varnothing$. Следовательно, $T \cap P_\beta = T \cap \Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_{\alpha_k}\Big) = \varnothing$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Пусть X — совершенно нормальное K-аналитическое пространство, γ — семейство таких подмножеств X, что для всякого $\gamma' \subseteq \gamma$, $|\gamma'| \leqslant \aleph_0$, выполнено $\bigcup\{P\colon P \in \gamma'\}$ — G_δ-множество. Тогда найдётся счётное семейство $\gamma_0 \subseteq \gamma$, для которого $\bigcup\{P\colon P \in \gamma_0\} = \bigcup\{P\colon P \in \gamma\}$.*

Замечание. Для того чтобы выполнялись теорема 2.2 и следствие, необходима совершенная нормальность для регулярного K-аналитического пространства X. Действительно, иначе найдётся строго предельно возрастающая последовательность открытых F_σ-множеств.

Семейство подмножеств $\mathcal{P}$ называется направленным, если для всяких $T_1, T_2 \in \mathcal{P}$ найдётся такое $T_3 \in \mathcal{P}$, что $T_3 \geqslant T_1 \cup T_2$. Семейство подмножеств $\mathcal{P}$ называется σ-непрерывным, если для всякой возрастающей последовательности $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, $T_i \in \mathcal{P}$, $i \in \mathbb{N}$, выполняется $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i \in \mathcal{P}$.

Если дополнительно потребовать, чтобы $\mathcal{P}$ было покрытием X, то окажется справедливой следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть X — K-аналитическое пространство и γ — направленное σ-непрерывное покрытие X, состоящее из G_δ-множеств. Тогда $X \in \gamma$.*

Доказательство. По лемме 2.1 найдутся полное по Чеху финально компактное пространство Y и непрерывное отображение $f\colon Y \xrightarrow{\text{на}} X$. Тогда $\{f^{-1}(T)\colon T \in \gamma\}$ — направленное σ-непрерывное покрытие Y. Следовательно, достаточно предполагать, что X — полное по Чеху финально компактное пространство.

Предположим противное. Положим $\mathcal{F} = \{F\colon F \subseteq X$ замкнуто и $F \not\subseteq T$ для всякого $T \in \gamma\}$.

Покажем, что верно следующее утверждение.

I. Найдётся такое $T \in \gamma$, что $\operatorname{Int} \overline{T} \neq \varnothing$.

Предположим противное. Так как X полно по Чеху, то $X = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n$, где $G_n \supseteq G_{n+1}$ — открытые в βX множества, $n \in \mathbb{N}$. Построим индукцией по n множества $Z_n = \{z_i\colon 2^{n-2} < i \leqslant 2^{n-1}\} \subseteq X$, $n > 1$, $Z_1 = \{z_1\}$, семейства замкнутых множеств $\mathcal{A}_n = \{\Phi_{in}\colon 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}\}$, $n \geqslant 1$, семейства открытых множеств $\mathcal{P}_n = \{O_m(\Phi_{in})\colon \Phi_{in} \in \mathcal{A}_n,\ m \in \mathbb{N}\}$ и множества $T_n \in \gamma$, где $n \in \mathbb{N}$, такие что справедливы следующие условия.

1. $Z_i \in \Phi_{in}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

2. $\Phi_{in} \subseteq \Phi_{i,n-1}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-2}$, $n \geqslant 2$.

3. Φ_{in} — компакт и $\{O_m(\Phi_{in})\}_{m=1}^{\infty}$ — убывающая база окрестностей Φ_{in}, $\Phi_{in} \in \mathcal{A}_n$, $n \geqslant 1$.

4. $\Phi_{in} \subseteq T_n$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. $O_m(\Phi_{in}) \subseteq O_m(\Phi_{i,n-1})$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-2}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

6. $O_m(\Phi_{2^{n-2}+k,n}) \subseteq O_n(\Phi_{k,n-1}) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} \overline{T}_j$, $k \leqslant 2^{n-2}$, $m \in \mathbb{N}$.

7. Семейство $\mathcal{A}_n$ дизъюнктно, $n \in \mathbb{N}$.

8. $T_n \subseteq T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $z_1 \in X$ произвольно, $T_1 \in \gamma$, $z_1 \in T_1$. Так как T_1 — G_δ-множество, а X точечно счётного типа [34], то найдётся такой компакт счётного характера K, что $z_1 \in K \subseteq T_1$. Пусть $\{O_m(K)\}_{m=1}^{\infty}$ — убывающая база окрестностей K и $[O_m(K)]_{\beta X} \subseteq G_m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим $\Phi_{11} = K$. Пусть множества T_i, Z_i и семейства множеств $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{P}_i$, $i \leqslant l$, построены так, что выполнены условия 1—8. Множество $O_{l+1}(\Phi_{kl}) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} \overline{T}_i$, $k \leqslant 2^{l-1}$, непусто, так как $\operatorname{Int} \overline{T}_i = \varnothing$, $i \leqslant l$. Пространство X не имеет изолированных точек (γ — покрытие X нигде не плотными множествами), следовательно, можно выбрать точки $z_{2^{l-1}+k} \in O_{l+1}(\Phi_{kl}) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} \overline{T}_l$ таким образом, что $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$, $i, j \leqslant 2^l$. Так как γ — направленное покрытие, то выберем $T_{l+1} \in \gamma$ и $T_{l+1} \supseteq T_l \cup \{Z_i\colon 1 \leqslant i \leqslant 2^l\}$. Пространство X точечно счётного типа, а T_{l+1} — G_δ-множество, поэтому выберем $\Phi_{i,l+1}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^l$, как такие дизъюнктные компакты счётного характера, что $\Phi_{i,l+1} \subseteq \Phi_{il}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{l-1}$, $z_i \in \Phi_{i,l+1}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^l$, $\Phi_{2^{l-1}+k,l+1} \subseteq O_{l+1}(\Phi_{kl}) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} \overline{T}_i$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{l-1}$. Далее выберем убывающие базы окрестностей $\{O_m(\Phi_{i,l+1})\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялись условия 5, 6. Итак, построены такие множества

$$\{T_n\}_{n=1}^\infty, \quad \{Z_i\}_{i=1}^\infty, \quad \{\Phi_{in}\colon 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}\}_{n=1}^\infty, \quad \{O_m(\Phi_{in})\}_{m=1}^\infty,$$

что верны условия 1—8.

Пусть $\Phi_i = \bigcap\{\Phi_{in}\colon 2^{n-1} \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда семейство $\{\Phi_i\}_{i=1}^\infty$ дизъюнктно. Действительно, пусть $i \neq j$. Выберем такое n, что $2^{n-1} > i$, $2^{n-1} > j$. Тогда $\Phi_i \subseteq \Phi_{in}$, $\Phi_j \subseteq \Phi_{jn}$, и по условию 7 $\Phi_i \cap \Phi_j = \varnothing$.

9. Для всякого $i \in \mathbb{N}$ и всякой окрестности $O(\Phi_i)$ существует $\Phi_{i_1} \subseteq O(\Phi_i)$, где $i_1 \neq i$. Действительно, в силу условия 2 найдётся такое n, что $\Phi_{in} \subseteq O(\Phi_i)$. Тогда (см. условие 3) найдётся $O_k(\Phi_{in}) \subseteq O(\Phi_i)$. Возьмём $l \geqslant \max\{n,k\}$. По условиям 2 и 5 $O_l(\Phi_{il}) \subseteq O_k(\Phi_{in})$. Тогда из условия 6 следует, что $\Phi_{2^l+i,\, l+1} \subseteq$ $\subseteq O_l(\Phi_i)$. Следовательно, имеет место $\Phi_{2^l+i} \subseteq O_l(\Phi_{il}) \subseteq O_k(\Phi_{in}) \subseteq O(\Phi_i)$.

10. $\Phi_m \subseteq T_n$ для всяких $n, m \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m$. Действительно, по условию 4 $\Phi_{mn} \subseteq T_n$ при $n \geqslant m$. Следовательно, $\Phi_m \subseteq \Phi_{mn} \subseteq T_n$.

11. $\Phi_m \cap \overline{T} = \varnothing$ для всяких $n, m \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant 2^{n+1}$. Если $m \geqslant 2^{n+1}$, то $m =$ $= 2^p + k$, где $p \geqslant n$, $k \leqslant 2^p$. Тогда $\Phi_m \subseteq \Phi_{m,p+1}$, и по условию 6 $\Phi_{m,p+1} \cap \overline{T}_n = \varnothing$.

Так как γ σ-непрерывно, $T = \bigcup\limits_{n=1}^\infty T_n \in \gamma$. Пусть $T = \bigcap\limits_{i=1}^\infty O_i$, где $O_{i+1} \subseteq O_i$ и O_i открыты в X, $i \in \mathbb{N}$. Построим по индукции такие последовательности Φ_{m_k}, $m_k < m_{k+1}$, и окрестности $O(\Phi_{m_k})$, $k \in \mathbb{N}$, что выполнены следующие условия.

12. $\overline{O(\Phi_{m_{k+1}})} \subseteq O_{k+1} \cap O(\Phi_{m_k})$ и $\overline{O(\Phi_{m_k})}^{\beta X} \subseteq G_k$, $k \in \mathbb{N}$.

13. $O(\Phi_{m_k}) \cap \overline{T}_i = \varnothing$ при $k \geqslant i$, $k, i \in \mathbb{N}$.

Такое построение возможно по утверждениям 9, 11. Пусть

$$L = \bigcap_{k=1}^\infty O(\Phi_{m_k}) = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{O(\Phi_{m_k})} \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty O_k = T.$$

Тогда из условия 12 следует, что $L \neq \varnothing$. Но $L \cap \Bigl(\bigcup\limits_{n=1}^\infty T_n\Bigr) = \varnothing$ (см. условие 13). Противоречие, так как $T = \bigcup\limits_{n=1}^\infty T_n$.

Так как полнота по Чеху и финальная компактность наследуются замкнутыми множествами, то справедливо следующее утверждение.

I$'$. Пусть $F \subseteq X$ замкнуто. Тогда найдётся такое $T \in \gamma$, что выполняется соотношение $\operatorname{Int}_F(\overline{F \cap T}) \neq \varnothing$.

Положим $\tilde{\mathcal{F}} = \{F \subseteq X$ замкнуто и для всякого открытого $V \subseteq F$, $V \neq \varnothing$, $\overline{V} \in \mathcal{F}\}$.

Покажем, далее, что выполняется утверждение II.

II. Для всякого $F \in \mathcal{F}$ найдётся $\tilde{F} \subseteq F$, $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Положим $U = \bigcup\{\operatorname{Int}_F(T \cap F)\colon T \in \gamma\}$, $F_1 = F \setminus U$. Множество F_1 непустое. Иначе (X финально компактно) найдутся такие $T_n \in \gamma$, $n \in \mathbb{N}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^\infty \operatorname{Int}_F(T_n \cap F) = F$. Так как γ является направленным и σ-непрерывным, то найдётся $T \in \gamma$, $T \supseteq \bigcup\limits_{n=1}^\infty T_n$. Следовательно, $T \supseteq F$, но $F \in \mathcal{F}$. Противоречие.

Покажем, что $F_1 \in \tilde{\mathcal{F}}$. Предположим противное. Тогда найдётся $V \subseteq F_1$, $V \neq \varnothing$, V открыто в F_1 и $V \subseteq T^*$ для некоторого $T^* \in \gamma$. Выберем такое открытое F_σ-множество $W \subseteq U \cup V$ в F, что $W \cap F_1 \neq \varnothing$. Тогда $W \cap F_1 \subseteq T^*$, и потому $W \setminus T^* \subseteq U$. Так как $W \setminus T^*$ — F_σ-множество в X, оно финально компактно, следовательно, покрывается множествами $\mathrm{Int}_F(T_n \cap F)$, где $T_n \in \gamma$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдётся $\tilde{T} \in \gamma$, $\tilde{T} \supseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n \cup T^*$ и $\mathrm{Int}_F(\tilde{T} \cap F) \supseteq W$. Но $W \not\subseteq U$. Противоречие. Этим утверждение II доказано.

Построим по индукции такие множества T_0, $T_n \in \gamma$, $T_n \subseteq T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, компакты B_0, $B_{p|n}$, замкнутые множества F_0, $F_{p|n} \in \tilde{\mathcal{F}}$, множества $V_0 \subseteq F_0$, $V_{p|n} \subseteq F_{p|n}$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, что

а) $V_0 \subseteq \mathrm{Int}_{F_0}(\overline{F_0 \cap T_0})$, $V_{p|n} \subseteq \mathrm{Int}_{F_{p|n}}(\overline{F_{p|n} \cap T_n})$ — непустые F_σ-множества, открытые в F_0 (соответственно в $F_{p|n}$), $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$,

б) $B_0 \subseteq T_0 \cap V_0$, $B_{p|n} \subseteq T_n \cap V_{p|n}$ — непустые компакты счётного характера в F_0 (соответственно в $F_{p|n}$),

в) $[V_{p|n}]_{\beta X} \subseteq G_n$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, $[V_0] \subseteq G_0$,

г) $F_{p|n+1} \subseteq F_{p|n}$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$,

д) $F_{p|n+1} \cap T_n = \varnothing$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$,

е) $F_{p|n,k} \to B_{p|n}$ при $k \to \infty$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Построим T_0, B_0, F_0, V_0. Так как $X \in \mathcal{F}$, то по утверждению II найдётся $F_0 \in \tilde{\mathcal{F}}$. Выберем такое $T_0 \in \gamma$ (см. I$'$), что $\mathrm{Int}_{F_0}(\overline{T_0 \cap F_0}) \neq \varnothing$. Пусть $V_0 \subseteq \mathrm{Int}_{F_0}(\overline{T_0 \cap F_0})$ — непустое открытое (в F_0) F_σ-множество и $[V_0]_{\beta X} \subseteq G_0$. Так как $T_0 \cap V_0$ — непустое G_δ-множество в F_0, то выберем в нём непустой компакт B_0 счётного характера в F_0.

Пусть построены множества T_0, B_0, F_0, V_0, T_k, $B_{p|k}$, $F_{p|k}$, $V_{p|k}$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $k \leqslant m$, удовлетворяющие условиям а)—е). Так как $B_{p|m}$ — компакт счётного характера в $F_{p|m}$, то выберем $\{O_l(B_{p|m})\}_{l=1}^{\infty}$ — монотонно убывающую базу $B_{p|m}$, состоящую из конуль-множеств $F_{p|m}$ и $O_1(B_{p|m}) \subseteq V_{p|m}$. Так как $O_l(B_{p|m})$ — F_σ-множество, а T_m — G_δ-множество, то $O_l(B_{p|m}) \setminus T_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_{ln}$, где Φ_{ln} — замкнутые множества, $n \in \mathbb{N}$. Множество $F_{p|m}$ принадлежит $\tilde{\mathcal{F}}$, следовательно, найдётся $\Phi_{ln_0} \in \mathcal{F}$. По утверждению II выберем $\Phi'_{ln_0} \subseteq \Phi_{ln_0}$, $\Phi'_{ln_0} \in \tilde{\mathcal{F}}$, и положим $F_{p|m,l} = \Phi'_{ln_0}$. Ясно, что $F_{p|m,l} \to B_{p|m}$ при $l \to \infty$. По утверждению I$'$ найдутся такие $T_{p|m,l} \in \gamma$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{N}$, что $\mathrm{Int}_{F_{p|m,l}}(\overline{T_{p|m,l} \cap F_{p|m,l}}) \neq \varnothing$. Так как γ является направленным и σ-непрерывным, то найдётся такое $T_{m+1} \in \gamma$, что $T_{m+1} \supseteq T_{p|m,l}$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{N}$, и $T_{m+1} \supseteq T_m$. Тогда $\mathrm{Int}_{F_{p|m,l}}(\overline{T_{m+1} \cap F_{p|m,l}}) \neq \varnothing$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{N}$. Найдётся содержащееся в $\mathrm{Int}_{F_{p|m,l}}(\overline{T_{m+1} \cap F_{p|m,l}})$ непустое открытое (в $F_{p|m,l}$) F_σ-множество $V_{p|m,l}$, такое что $[V_{p|m,l}]_{\beta X} \subseteq G_{m+1}$. Выберем непустой компакт $B_{p|m,l} \subseteq T_{m+1} \cap V_{p|m,l}$ счётного характера в $F_{p|m,l}$. Итак, построение закончено для $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $k \leqslant m+1$. Так как множества T_m возрастают, то $T = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} T_m \in \gamma$. Пусть $T = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} W_i$, $W_{i+1} \subseteq W_i$, где W_i — открытые в X множества, $i = 0, 1, \ldots$. Справедливо $B_0 \subseteq T_0 \subseteq W_0$, и так как $F_n \to B_0$ при $n \to \infty$, найдётся $F_{n_0} \subseteq W_0$. Так как $B_{n_0} \subseteq F_{n_0} \cap T_1 \subseteq W_1$, найдётся $F_{n_0 n_1} \subseteq W_1$. Продолжая этот процесс, выберем по индукции множества $F_{n_0,\ldots n_m} \subseteq W_m$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть $F = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} F_{n_0,\ldots n_m}$. Тогда по свойствам а), в), г) $F \neq \varnothing$ и $F \subseteq \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} W_m = T$. С другой стороны, $F_{n_0\ldots n_m} \cap T_{m-1} = \varnothing$, $m \in \mathbb{N}$, по условию д). Следовательно, $F \cap \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T_i = F \cap T = \varnothing$. Противоречие. Теорема доказана.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется F_σ-отображением, если прообраз всякого замкнутого множества в Y — F_σ-множество в X.

Следствие 2.5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — F_σ-отображение K-аналитического пространства X на Y. Тогда Y финально компактно.*

Следствие 2.6. *Пусть X — регулярное K-аналитическое пространство, $\mathcal{F} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — σ-центрированное семейство непустых F_σ-множеств. Тогда $\overline{\bigcap\{T_\alpha\colon \alpha \in A\}} = \bigcap\{\overline{T}_\alpha\colon \alpha \in A\} \neq \varnothing$.*

Доказательство. То, что $\bigcap\{T_\alpha\colon \alpha \in A\} \neq \varnothing$, справедливо и без предположения о регулярности X (достаточно рассмотреть семейство $\{X \setminus T_\alpha\colon \alpha \in A\}$). Теперь предположим, что

$$\bigcap\{\overline{T}_\alpha\colon \alpha \in A\} \not\supseteq \overline{\bigcap\{T_\alpha\colon \alpha \in A\}},$$

пусть

$$\bigcap\{\overline{T}_\alpha\colon \alpha \in A\} \setminus \overline{\bigcap\{T_\alpha\colon \alpha \in A\}}$$

содержит x. Пространство X нормально. Выберем конуль-множество $O(x)$, содержащее x, $O(x) \cap \overline{\bigcap\{T_\alpha\colon \alpha \in A\}} = \varnothing$, и рассмотрим семейство непустых F_σ-множеств $\{O(x) \cap T_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Это семейство σ-центрированное, следовательно, $\bigcap\{O(x) \cap T_\alpha\colon \alpha \in A\} = O(x) \cap \bigcap\{T_\alpha\colon \alpha \in A\} \neq \varnothing$. Но это противоречит выбору $O(x)$. Следствие доказано.

Если же в теореме Лузина отказаться от предельности семейства и одновременно добавить условие, что все P_α — F_σ-множества, то в классической ситуации, когда X — аналитическое пространство, приходим к следующей теореме Зальцвассера [6].

Теорема ([6]). *Пусть X — аналитическое пространство. Тогда не существует строго возрастающей последовательности функций $\{f_\alpha\colon \alpha < \omega_1\} \subseteq B_1(X)$, следовательно, не существует строго возрастающей последовательности $\{T_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ F_σ- и G_δ-множеств.*

Следующий результат указывает класс K-аналитических пространств, для которых справедливо заключение этой теоремы.

Теорема 2.7. *Следующие условия для регулярного K-аналитического пространства X эквивалентны:*

1) *не существует строго возрастающей последовательности* $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \subseteq$ $\subseteq B_1(X)$,
2) *не существует строго возрастающей последовательности* $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ F_σ- *и* G_δ-*множеств в* X,
3) X *наследственно финально компактно и наследственно сепарабельно.*

Доказательство.

Импликация $1 \to 2$ следует из того, что если $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ — строго возрастающая последовательность F_σ- и G_δ-множеств, то последовательность $\{\mathcal{X}(P_\alpha)\}_{\alpha<\omega_1} \subset B_1(X)$ также строго возрастает.

$2 \to 3$. Покажем, что X совершенно нормально. Предположим противное. Пусть $F \subseteq X$ — замкнутое не G_δ-множество. Построим строго убывающую последовательность $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ замкнутых G_δ-множеств, содержащих F. Тогда $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ — строго возрастающая последовательность F_σ- и G_δ-множеств. Противоречие. Итак, X совершенно нормально, а в силу финальной компактности X наследственно финально компактно. Если X не наследственно сепарабельно, то найдётся строго возрастающая последовательность $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ замкнутых множеств [5]. Поскольку X совершенно нормально, F_α — G_δ-множества. Противоречие.

$3 \to 1$. Предположим противное. Пусть существует строго возрастающая последовательность $\mathcal{F} = \{f_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \subseteq B_1(X)$. По лемме 2.1 считаем, что X полно по Чеху. Для всякой функции $f \in \mathbb{R}^X$ и $p, q \in \mathbb{R}$ положим $B_p(f) = \{x \colon f(x) \leqslant p\}$, $B^q(f) = \{x \colon f(x) \geqslant q\}$.

Стандартно доказывается следующее утверждение. Пусть X — нормальное пространство. Отображение f принадлежит $B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для всяких $p, q \in Q$, $p < q$, $B_p(f)$ и $B^q(f)$ отделимы F_σ-множествами.

Очевидно, что $[\mathcal{F}]_{\mathbb{R}^X}$ порядково изоморфно и гомеоморфно $\omega_1 + 1$. Пусть $[\mathcal{F}]_{\mathbb{R}^X} = \{\varphi_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}$, $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ — порядковый изоморфизм. Тогда $\mathcal{F} =$ $= \{\varphi_\alpha \colon \alpha \in A \subseteq \omega_1\}$. Так как X совершенно нормально, $\mathcal{B} = [\mathcal{F}]_{\mathbb{R}^X} \setminus B_1(X)$ несчётно [9]. По доказанному выше утверждению для всякой $f \in \mathcal{B}$ найдутся такие $p(f), q(f) \in Q$, $p(f) < q(f)$, что $B_{p(f)}(f)$ и $B^{q(f)}(f)$ не отделимы F_σ-множествами. Следовательно, найдётся такое несчётное $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, что $p(f) = p_0$, $q(f) = q_0$ для всякой $f \in \mathcal{B}'$. Так как множества $\{B_{p_0}(f_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ убывают, а множества $\{B^{q_0}(f_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ возрастают, то для всякого замкнутого $F \subseteq X$ найдётся такое $\alpha(F) < \omega_1$, что $\overline{F \cap B_{p_0}(f_\alpha)} = \overline{F \cap B_{p_0}(f_{\alpha(F)})}$ и $\overline{F \cap B^{q_0}(f_\alpha)} =$ $= \overline{F \cap B^{q_0}(f_\alpha(F))}$ для всякого $\alpha \in A$, $\alpha \geqslant \alpha(F)$.

Построим по трансфинитной индукции ординалы $\alpha_\gamma \in A$, $\alpha_{\gamma+1} > \alpha_\gamma$, и непустые замкнутые множества F_γ, $F_{\gamma+1} \supseteq F_\gamma$. Пусть $\alpha_0 \in A$, $\alpha_0 \geqslant \alpha(X)$, $F_0 = \overline{B_{p_0}(f_{\alpha_0})} \cap \overline{B^{q_0}(f_{\alpha_0})}$. Предположим, что построены $\alpha_\gamma \in A$, F_γ, $\gamma < \beta$. Если β предельно, то полагаем $F_\beta = \bigcap\limits_{\gamma<\beta} F_\gamma$, $\alpha_\beta \in A$, $\alpha_\beta > \sup\{\alpha_\gamma \colon \gamma < \beta\}$. Пусть $\beta = \overline{\beta} + 1$. Тогда выберем $\alpha_\beta \in A$, $\alpha_\beta > \sup\{\alpha_{\overline{\beta}}, \alpha(F_{\overline{\beta}})\}$, $F_\beta =$ $= \overline{B_{p_0}(f_{\alpha_{\overline{\beta}}}) \cap F_{\overline{\beta}}} \cap \overline{B^{q_0}(f_{\alpha_{\overline{\beta}}}) \cap F_{\overline{\beta}}}$. Так как X наследственно финально компактно, найдётся $\gamma_0 = \min\{\gamma \colon F_\gamma = F_{\gamma+1}\}$. Если $F_{\gamma_0} \neq \varnothing$, то тогда $F_{\gamma_0+1} =$

$= \overline{B_{p_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_{\gamma_0}} = \overline{B^{q_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_{\gamma_0}}$. Так как X полно по Чеху, а $f_{\alpha_{\gamma_0}} \in B_1(X)$, то $B_{p_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_{\gamma_0}$ и $B^{q_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_{\gamma_0}$ — плотные G_δ-множества в полном по Чеху пространстве F. По теореме Бэра их пересечение непусто, что ведёт к противоречию. Итак, $F_{\gamma_0} = \varnothing$. Заметим, что для всякого $\alpha \in A$, $\alpha \geqslant \alpha_{\gamma_0}$, и всякого F_γ, $\gamma \leqslant \gamma_0$, $\overline{B_{p_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma} = \overline{B_{p_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_\gamma}$, $\overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma} = \overline{B^{q_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_\gamma}$.

Выберем такое $f_\alpha \in \mathcal{B}'$, что $\omega_1 > \alpha > \alpha_{\gamma_0}$. Тогда найдётся такое $\beta \in A$, что $\beta > \alpha > \alpha_{\gamma_0}$, следовательно, $f_\beta > f_\alpha > f_{\alpha_{\gamma_0}}$ и потому $B_{p_0}(f_\beta) \subset B_{p_0}(f_\alpha) \subset \subset B_{p_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}})$, $B^{q_0}(f_\beta) \supset B^{q_0}(f_\alpha) \supset B^{q_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}})$. Таким образом, для всякого $\gamma \leqslant \gamma_0$ выполнено $\overline{B_{p_0}(f_\alpha \cap F_\gamma} = \overline{B_{p_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_\gamma}$ и $\overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma} = \overline{B^{q_0}(f_{\alpha_{\gamma_0}}) \cap F_\gamma}$. Положим

$$P = (\overline{B^{q_0}(f_\alpha)} \setminus F_0) \cup \bigcup \{(\overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma}) \setminus (\overline{B_{p_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma})\colon \gamma < \gamma_0\},$$

$$T = (\overline{B_{p_0}(f_\alpha)} \setminus F_0) \cup \bigcup \{\overline{B_{p_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma)} \setminus (\overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_\gamma})\colon \gamma < \gamma_0\}.$$

Так как X совершенно нормально, то P и T — F_σ-множества. Непосредственно проверяется, что $P \cap T = \varnothing$. Покажем, что $B^{q_0}(f_\alpha) \subseteq P$. Если $x \in B^{q_0}(f_\alpha) \setminus F_0$, то $x \in \overline{B^{q_0}(f_\alpha)} \setminus F_0$. В противном случае пусть $\gamma = \min\{\beta\colon x \notin F_\beta\}$. Тогда $\gamma \leqslant \gamma_0$, и из построения множеств $\{F_\alpha\}$ следует, что $\gamma = \overline{\gamma} + 1$. Но тогда $x \in \overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_{\overline{\gamma}}}$ и $x \notin F_\gamma = \overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_{\overline{\gamma}}} \cap \overline{B_{p_0}(f_\alpha) \cap F_{\overline{\gamma}}}$. Следовательно, $x \in \overline{B^{q_0}(f_\alpha) \cap F_{\overline{\gamma}}} \setminus \overline{B_{p_0}(f_\alpha) \cap F_{\overline{\gamma}}} \subseteq P$. Аналогично доказывается, что $B_{p_0}(f_\alpha) \subseteq T$. Получили противоречие с тем, что $B^{q_0}(f_\alpha)$ и $B_{p_0}(f_\alpha)$ не отделяются F_σ-множествами. Теорема доказана.

§ 3. Z_σ-отображения и K_σ-аналитические пространства

Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ называется Z_σ-отображением, если для всякого нуль-множества $\Phi \subseteq Y$, $f^{-1}(\Phi) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — нуль-множество X, $i \in \mathbb{N}$. Если $f\colon X \to Y$ — биекция и f, f^{-1} — Z_σ-отображения, то f называется бэровским изоморфизмом первого уровня.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется σ-непрерывным, если $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i$, где Φ_i — нуль-множество X и $f|_{\Phi_i}$ непрерывно, $i \in \mathbb{N}$. Эти понятия введены в [24, 25]. Они естественно возникают при изучении пространств $B_1(X)$ и могут рассматриваться (с дескриптивной точки зрения) как наиболее близкие к непрерывным отображениям. Точнее говоря, Z_σ-отображения образуют подкласс $B_1(X,Y)$. Следующее простое предложение подчёркивает, что роль Z_σ-отображений в B_1-теории аналогична роли непрерывных отображений в C_p-теории.

Предложение 3.1. *Пусть X, Y — тихоновские пространства и $f\colon X \to Y$. Тогда*

1) *f — Z_σ-отображение тогда и только тогда, когда $f^*(B_1(Y)) \subseteq B_1(X)$,*

2) *f — Z_σ-отображение и $f(X)$ — $\aleph_0$-плотно в Y ($f(X) = Y$) тогда и только тогда, когда $f^*|_{B_1(Y)}\colon B_1(Y) \to f^*(B_1(Y))$ — уплотнение (гомеоморфизм),*
3) *f — Z_σ-отображение, $f(X)$ — $\aleph_0$-плотно в Y и $f\colon X \to f(X)$ взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда $f^*(B_1(Y))$ плотно в $B_1(X)$,*
4) *f — бэровский изоморфизм первого уровня тогда и только тогда, когда $f^*(B_1(Y)) = B_1(X)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть f — Z_σ-отображение, $\varphi \in B_1(Y)$. Проверим, что $\varphi f \in B_1(X)$. Если $U \subseteq \mathbb{R}$ открыто, то $\varphi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — нуль-множество в Y, $i \in \mathbb{N}$. Так как f — Z_σ-отображение, то $f^{-1}(F_i) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Phi_{ij}$, где Φ_{ij} — нуль-множество в X, $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда $(\varphi f)^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} \Phi_{ij}$ — счётное объединение нуль-множеств в X, следовательно, $\varphi f \in B_1(X)$.

Обратно, пусть $f^*(B_1(Y)) \subseteq B_1(X)$. Проверим, что f — Z_σ-отображение. Пусть $F \subseteq Y$ — нуль-множество. Тогда $\chi_F \in B_1(Y)$ и $(\chi_F f)^{-1}(1/2, 3/2) = f^{-1}(F)$. По предположению $\chi_F f \in B_1(Y)$, следовательно, $f^{-1}(F)$ — счётное объединение нуль-множеств и f — Z_σ-отображение.

Проверка остальных утверждений не вызывает трудностей и опускается.

Глубокое исследование Z_σ-отображений и бэровских изоморфизмов первого уровня и близких к ним понятий в случае метризуемых пространств было предпринято в [22, 25, 26]. Нетрудно проверить, что если X нормально, то σ-непрерывное отображение является Z_σ-отображением (для тихоновских пространств это неверно).

Теорема 3.2 ([25]). *Всякое Z_σ-отображение суслинского подмножества полного метрического пространства в метрическое пространство σ-непрерывно.*

В [25] также отмечено, что результат становится неверным (даже для сепарабельных метрических пространств), если опустить условие суслиновости. Точнее говоря, ограничения типа полноты в такого рода результатах необходимы. Мы ограничимся рассмотрением K-аналитических пространств и их Z_σ-образов. Простые примеры показывают, что Z_σ-отображение компактного пространства может не быть σ-непрерывным и Z_σ-образ компактного пространства может не быть K-аналитическим. Приведём прежде всего два утверждения о том, когда Z_σ-отображение σ-непрерывно в неметризуемом случае.

Предложение 3.3. *Всякое Z_σ-отображение полного по Чеху финально компактного пространства в сепарабельное метрическое пространство σ-непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение, где X — полное по Чеху финально компактное пространство, а Y — сепарабельное метрическое пространство. Так как f — бэровское отображение, то по [12] найдутся такие польское пространство Z, совершенное отображение $\varphi\colon X \xrightarrow{\text{на}} Z$ и отображение

$g\colon Z \to Y$, что $f = g\varphi$. В силу того, что отображение φ замкнуто, g — Z_σ-отображение. Тогда в силу теоремы 3.2 g является σ-непрерывным. Следовательно, и $f = g\varphi$ является σ-непрерывным. Предложение доказано.

Следствие 3.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение K-аналитического пространства X на сепарабельное метрическое пространство Y. Тогда Y — аналитическое пространство.*

Лемма 3.5. *Пусть X — K-аналитическое пространство и $\gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ — покрытие X. Если для всякого счётного $\gamma' \subseteq \gamma_n$, где $n \in \mathbb{N}$, объединение $\bigcup \gamma'$ является F_σ- и G_δ-множеством в X, то γ содержит счётное подпокрытие.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 будем считать, что X — полное по Чеху финально компактное пространство. Предположим противное. Тогда γ не содержит счётного подпокрытия. Не ограничивая общности, в силу пункта I доказательства теоремы 2.4 будем считать, что все элементы γ нигде не плотны. Пусть $X_n = \bigcup \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Так как X бэровское, то найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{Int} \overline{X}_{n_0} \neq \varnothing$. Выберем открытое $V \subseteq \overline{V} \subseteq \operatorname{Int} \overline{X}_{n_0}$, $V \neq \varnothing$. Положим $Y = \overline{V}$, $\mu = \{P \cap Y\colon P \in \gamma_{n_0}\}$. Тогда $\bigcup \mu$ плотно в Y, $\bigcup \mu'$ — F_σ- и G_δ-множество в Y, если $\mu' \subseteq \mu$, $|\mu'| \leqslant \aleph_0$, и элементы μ нигде не плотны. Покажем, что это приводит к противоречию. Пусть $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$, $O_{n+1} \subseteq O_n$ и O_n открыто в βY, $n \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности будем считать, что μ замкнуто относительно конечных объединений. Построим по индукции семейства компактов $\mathcal{A}_n = \{\Phi_{in}\colon 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}\}$, семейства открытых множеств $\mathcal{P}_n = \{O_m(\Phi_{in})\colon \Phi_{in} \in \mathcal{A}_n,\ m \in \mathbb{N}\}$, элементы $P_n \in \mu$, $P_n \subseteq P_{n+1}$, множества $Z_n = \{z_i\colon 2^{n-2} < i \leqslant 2^{n-1}\} \subseteq Y$ так, чтобы выполнялись следующие свойства.

1. $z_i \in \Phi_{in}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}$.
2. $\Phi_{in} \subseteq \Phi_{i,n-1}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-2}$, $n \geqslant 2$.
3. Φ_{in} — компакт, $\{O_m(\Phi_{in})\}_{m=1}^{\infty}$ — база Φ_{in}, $O_{m+1}(\Phi_{in}) \subseteq O_m(\Phi_{in})$.
4. $\Phi_{in} \subseteq P_n$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}$.
5. $O_m(\Phi_{in}) \subseteq O_m(\Phi_{i,n-1})$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-2}$, $m \in \mathbb{N}$.
6. $O_m(\Phi_{2^{n-2}+k,n}) \subseteq O_m(\Phi_{k,n-1}) \subseteq \overline{P}_{n-1}$, $k \leqslant 2^{n-2}$, $m \in \mathbb{N}$.
7. Семейство $\mathcal{A}_n$ дизъюнктно.

Это построение аналогично построению таких же семейств в доказательстве теоремы 2.4. Положим $\Phi_i = \bigcap \{\Phi_{in}\colon 2^{n-1} \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Так же, как в доказательстве теоремы 2.4, проверяется, что семейство $\{\Phi_i\}$ дизъюнктно и справедливы следующие утверждения.

8. $O(\Phi_i) \supset \Phi_{i_1}$, $i_1 \neq i$, $i \in \mathbb{N}$.
9. Для всяких $m \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m$ выполняется $\Phi_m \subseteq P_n$.
10. Для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant 2^{n+1}$ выполняется $\overline{P}_n \cap \Phi_m = \varnothing$.

Так как $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ — G_δ-множество, то $P = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, где G_i открыты в Y и $G_{i+1} \subseteq G_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Далее по индукции строятся такие последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $m_k < m_{k+1}$, и $O(\Phi_{m_k})$, $k \in \mathbb{N}$, что $\overline{O(\Phi_{m_{k+1}})} \subseteq G_k \cap O(\Phi_{m_k})$, $\overline{O(\Phi_{m_k})}^{\beta Y} \subseteq O_k$ и $\Phi_{m_k} \cap \overline{P}_k = \varnothing$. Тогда $\varnothing \neq L = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} O(\Phi_{m_k}) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{O(\Phi_{m_k})} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = P$ и $L \cap \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k = \varnothing$. Так как $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k = P$, приходим к противоречию. Лемма доказана.

Отметим некоторые простые свойства Z_σ-отображений и σ-непрерывных отображений, которые понадобятся ниже.

Предложение 3.6. *Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — Z_σ-отображения (σ-непрерывные отображения). Тогда*

1) *fg — Z_σ-отображение (σ-непрерывное отображение),*
2) *если $A \subset X$, то $f|_A\colon A \to Y$ — Z_σ-отображение (σ-непрерывное отображение),*
3) *если $B \subset Y$ Z_0-вложенно, то $f|_{f^{-1}(B)}\colon f^{-1}(B) \to B$ — Z_σ-отображение.*

Замечание. Если $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение, то $f\colon X \to f(X)$ может не быть Z_σ-отображением.

Тихоновское пространство X назовём K_σ-аналитическим, если найдутся K-аналитическое пространство Y и сюръективное Z_σ-отображение $f\colon Y \to X$.

Так как K-аналитические пространства — это непрерывные образы полных по Чеху финально компактных пространств, то в определении K_σ-пространства в силу леммы 2.1 можно вместо K-аналитических пространств Y брать полные по Чеху финально компактные пространства.

Предложение 3.7. *Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение K-аналитического пространства X на тихоновское пространство Y. Тогда*

1) *Y, а также произвольное бэровское подпространство Y финально компактны,*
2) *если $F \subseteq X$ замкнуто, то $f|_F\colon F \to f(F)$ — Z_σ-отображение и $f(F)$ финально компактно.*

Доказательство. Пусть $F \subseteq X$ замкнуто. Докажем, что $f(F)$ финально компактно. Пусть γ — покрытие $f(F)$ коноль-множествами в Y, замкнутое относительно счётных объединений. Так как f — Z_σ-отображение, то $\gamma^{-1} = \{f^{-1}(P)\colon P \in \gamma\}$ — покрытие F, состоящее из F_σ- и G_δ-множеств и замкнутое относительно счётных объединений. Так как F — замкнутое подмножество K-аналитического пространства X, то F — K-аналитическое пространство. В силу леммы 3.5 $\gamma^{-1} \cap F = \{T \cap F\colon T \in \gamma^{-1}\}$ содержит счётное подпокрытие, а следовательно, и γ содержит счётное подпокрытие $f(F)$. Для доказательства пункта 2 достаточно сослаться на пункты 2 и 3 предложения 3.6 и следующий известный результат [15]: финально компактное подпространство Z_0-вложено в произвольное тихоновское пространство. Пусть $B \subseteq Y$ — бэровское подпространство Y. Так как Z_σ-отображение является бэровским отображением, то

$f^{-1}(B)$ — бэровское подмножество X, следовательно, $f^{-1}(B)$ — K-аналитическое пространство [14]. Рассуждения, аналогичные приведённым в пункте 1 показывают, что B финально компактно. Этим заканчивается доказательство предложения.

Следствие 3.8. *K_σ-аналитическое пространство финально компактно.*

Следствие 3.9. *Бэровское подмножество K_σ-аналитического пространства является K_σ-аналитическим пространством.*

Отображение $f\colon X \to Y$ называется U-непрерывным, если для всякого замкнутого $F \subseteq X$ найдётся такое открытое в F непустое множество $W \subseteq F$, что $f|_W$ непрерывно. Всякое σ-непрерывное отображение полного по Чеху пространства U-непрерывно (обратное неверно). Следующее предложение, имеющее и самостоятельный интерес, будет использоваться для изучения K_σ-аналитических пространств.

Предложение 3.10. *Всякое Z_σ-отображение полного по Чеху финально компактного пространства на тихоновское пространство U-непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение полного по Чеху финально компактного пространства X на тихоновское пространство Y. Докажем прежде всего, что найдётся такое непустое открытое множество $U \subseteq X$, что $f|_U$ непрерывно. Предположим противное. Нам потребуется следующее утверждение.

I. Пусть $\varphi\colon M_1 \to M_2$ — Z_σ-отображение полного сепарабельного метрического пространства M_1 в сепарабельное метрическое пространство M_2, $V \subseteq M_1$ — открытое множество и $\varphi|_V$ разрывно. Тогда найдутся такие $x \in V$, открытые множества $V_n \subseteq V$, $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi\big|_{\{x\}\cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_k}$ разрывно, $\varphi\big|_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n}$ непрерывно, семейство $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ дизъюнктно, $V_n \to x$, $\varphi(x) \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(V_n)$.

В силу теоремы 3.2 φ является σ-непрерывным, т. е. $M_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ и $\varphi|_{F_n}$ непрерывно, $n \in \mathbb{N}$. Так как M_1 — бэровское пространство, то $W = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} F_n$ — открытое всюду плотное подмножество M_1 и $\varphi|_W$ непрерывно. Положим $\tilde V = V \cap W$. Тогда $\tilde V$ плотно в V и $\varphi|_{\tilde V}$ непрерывно. Так как $\varphi|_V$ разрывно, то найдётся такое $x \in V$, что $\varphi|_{\{x\}\cup\tilde V}$ разрывно [13]. Тогда найдётся такая последовательность $x_n \in \tilde V$, $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \to x$, но $\varphi(x_n) \not\to \varphi(x)$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $\varphi(x_n) \notin \overline{O(\varphi(x))}$, $n \in \mathbb{N}$, для некоторой окрестности $O(\varphi(x))$ точки $\varphi(x)$. Так как φ непрерывно в точках x_n, выберем такую дизъюнктную последовательность окрестностей $V_n = V(x_n)$, что $\varphi(V(x_n)) \cup \overline{O\varphi(x)} = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, и $\operatorname{diam} V_n < 1/n$. Этим заканчивается доказательство утверждения I.

В силу предложения 3.7 Y финально компактно. Тогда $Y = \lim(Y_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A)$ — предел обратного σ-спектра пространств со счётной базой (см. [11]). Кроме того,

$X = \lim(X_\gamma, \mu_\delta^\gamma, B)$ — предел обратного σ-спектра полных сепарабельных метрических пространств, где μ_δ^γ — совершенные отображения. Пусть $\pi_\alpha\colon Y \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, и $\mu_\gamma\colon X \to X_\gamma$, $\gamma \in B$, — проекции. Построим по индукции $\alpha_n \in A$, $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \in B$, $\gamma_n \leqslant \gamma_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, отображения $f_n\colon X_{\gamma_n} \to Y_{\alpha_n}$, точки $x_{n_1\dots n_k} \in X_{\gamma_n}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant k$, открытые непустые множества $V_{n_1\dots n_{k+1}} \in X_{\gamma_n}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant k+1$, так, чтобы выполнялись следующие свойства.

1. $f_n \mu_{\gamma_n} = \pi_{\alpha_n} f$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mu_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}}\Bigl(\{x_{n_1\dots n_k}\} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_{n_1\dots n_k n}\Bigr) \subseteq V_{n_1\dots n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant k$.
3. $V_{n_1\dots n_k n} \to x_{n_1\dots n_k}$ при $n \to \infty$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$.
4. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f_k(V_{n_1\dots n_k n})} \not\ni f_k(x_{n_1\dots n_k})$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$.
5. Последовательность $\{V_{n_1\dots n_k n}\}_{n=1}^{\infty}$ дизъюнктна, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$.

Отображение $f\colon X \to Y$ разрывно, следовательно, найдётся такое $\alpha_1 \in A$, что $\pi_{\alpha_1} f\colon X \to Y_{\alpha_1}$ разрывно. Тогда $\pi_{\alpha_1} f$ — Z_σ-отображение, следовательно бэровское отображение, и потому найдутся $\gamma_1 \in B$ и такое отображение $f_1\colon X_{\gamma_1} \to Y_{\alpha_1}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_{\gamma_1}"'] & Y \arrow[d, "\pi_{\alpha_1}"] \\ X_{\gamma_1} \arrow[r, "f_1"'] & Y_{\alpha_1} \end{tikzcd}$$

коммутативна [11].

Отсюда следует, что f_1 — разрывное отображение, а из совершенности $\mu_{\gamma_1 g}$ следует, что f_1 — Z_σ-отображение. По утверждению I найдутся $x_0 \in X_{\gamma_1}$ и $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая дизъюнктная последовательность непустых открытых множеств в X_{γ_1}, что $V_n \to x_0$ и $f_1(x_0) \notin \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_1(V_n)}$. Итак, первый шаг индукции завершён. Предположим, что всё построено для $n, k \leqslant m$. Рассмотрим непустое открытое множество $\mu_{\gamma_m}^{-1}(V_{n_1\dots n_m}) \subseteq X$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \leqslant m$. По предположению отображение $f|_{\mu_{\gamma_m}^{-1}(V_{n_1\dots n_m})}$ разрывно, следовательно, найдётся такое $\alpha(n_1\dots n_m) \in A$, что $\pi_{\alpha(n_1\dots n_m)} f|_{\mu_{\gamma_m}^{-1}(V_{n_1\dots n_m})}$ разрывно. Выберем α_{m+1} так, что $\alpha_{m+1} \geqslant \alpha_m$ и $\alpha_{m+1} \geqslant \alpha(n_1\dots n_m)$ для всех m-ок. Тогда $\pi_{\alpha_{m+1}} f|_{\mu_{\gamma_m}^{-1}(V_{n_1\dots n_m})}$ — разрывное отображение при всех m-ках. Так как $\pi_{\alpha_{m+1}} f$ — Z_σ-отображение, оно бэровское, потому найдутся γ_{m+1}, $\gamma_{m+1} \geqslant \gamma_m$, $\gamma_{m+1} \in B$, и такое отображение $f_{m+1}\colon X_{\gamma_{m+1}} \to Y_{\alpha_{m+1}}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_{\gamma_{m+1}}"'] & Y \arrow[d, "\pi_{\alpha_{m+1}}"] \\ X_{\gamma_{m+1}} \arrow[r, "f_{m+1}"'] & Y_{\alpha_{m+1}} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда и из того, что $\pi_{\alpha_{m+1}} f|_{\mu^{-1}_{\gamma_{m+1}}(V_{n_1\ldots n_m})}$ — разрывное отображение для всякой m-ки, следует, что отображения $f_{m+1}|_{\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(V_{n_1\ldots n_m})}$ разрывны для всякой m-ки. Так как f_{m+1} — Z_σ-отображение, то и $f_{m+1}|_{\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(V_{n_1\ldots n_m})}$ — Z_σ-отображение полного (топологически) сепарабельного метрического пространства $\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(V_{n_1\ldots n_m})$ в сепарабельное метрическое пространство $Y_{\alpha_{m+1}}$. По утверждению I найдутся $x_{n_1\ldots n_m} \in \mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(V_{n_1\ldots n_m})$ и такая дизъюнктная последовательность $\{V_{n_1\ldots n_m n}\}_{n=1}^{\infty}$ непустых открытых в $\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(V_{n_1\ldots n_m})$ множеств, что $V_{n_1\ldots n_m n} \to x_{n_i\ldots n_m}$ и $f_{m+1}(x_{n_1\ldots n_m}) \notin \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(V_{n_1\ldots n_m n})}$. Итак, всё построено для $n, k = m+1$. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$F_k = \overline{\bigcup\{\mu^{\gamma_m}_{\gamma_k}(x_{n_1\ldots n_m})\colon m > k,\ n_i \in \mathbb{N},\ i \leqslant m\}}.$$

Покажем, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k}(F_{k+1}) = F_k$. Так как $\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k}$ замкнуто, то достаточно доказать, что $\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k}(F_{k+1})$ плотно в F_k. Заметим, что $F_k = \overline{A_k \cup B_k}$, где

$$A_k = \bigcup\{\mu^{\gamma_m}_{\gamma_n}(x_{n_1\ldots x_m})\colon m > k+1,\ n_i \in \mathbb{N},\ i \leqslant m\},$$

$$B_k = \bigcup\{\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k}(x_{n_1\ldots n_{k+1}})\colon n_i \in \mathbb{N},\ i \leqslant k+1\}.$$

Тогда $\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k}(A_{k+1} \cup B_{k+1}) = A_k$. По свойствам 2 и 3 $B_{k+1} \supseteq \mu^{\gamma_{k+2}}_{\gamma_{k+1}}(x_{n_1\ldots n_{k+1} n})$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mu^{\gamma_{k+2}}_{\gamma_{k+1}}(x_{n_1\ldots n_k n}) \to x_{n_1\ldots n_k}$. Тогда $\mu^{\gamma_{k+2}}_{\gamma_k}(x_{n_1\ldots n_k n}) \to \mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k}(x_{n_1\ldots n_k})$, т. е. $\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k} F_{k+1} \supseteq A_k \cup B_k$, следовательно, $\mu^{\gamma_{k+1}}_{\gamma_k} F_{k+1} = F_k$. Пусть $\tilde{\alpha} = \sup\limits_i \alpha_i$, $\tilde{\gamma} = \sup\limits_i \gamma_i$. Тогда определено отображение $\tilde{f} = \lim\limits_i f_i\colon X_{\tilde{\gamma}} \to Y_{\tilde{\alpha}}$, причём $\tilde{f}$ — Z_σ-отображение. Рассмотрим $F \subseteq X_{\tilde{\gamma}}$, $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_k}(F_k)$. Тогда $\tilde{f}|_F\colon F \to Y_{\tilde{\alpha}}$ — Z_σ-отображение полного сепарабельного метрического пространства в сепарабельное метрическое пространство. Поэтому найдётся такое открытое в F непустое $V \subseteq F$, что $\tilde{f}|_V$ непрерывно. Тогда найдутся $k \in \mathbb{N}$ и такое открытое в F_k непустое $W \subseteq F_k$, что $(\mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_k})^{-1}(W) \subseteq V$. По определению F_k найдутся $m > k$ и такая точка $x_{n_1 n_2\ldots n_m} \in X_{\gamma_m}$, что $\mu^{\gamma_m}_{\gamma_k}(x_{n_1 n_2\ldots n_m}) \in W$. Тогда $(\mu^{\gamma_m}_{\gamma_k})^{-1}(W) \ni x_{n_1\ldots n_m}$. Пусть $\tilde{W}$ открыто в X_{γ_m} и $\tilde{W} \cap F_m = W$. По свойству 3 найдётся такое $l \in \mathbb{N}$, что $V_{n_1\ldots n_m n} \subseteq \tilde{W}$ при $n \geqslant l$ и $\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(x_{n_1\ldots n_m n}) \in W$ при $n \geqslant l$. Тогда $\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(x_{n_1\ldots n_m n}) \to x_{n_1\ldots n_m}$, но

$$\overline{\bigcup\{f_m(\mu^{\gamma_{m+1}}_{\gamma_m}(x_{n_1\ldots n_m n})\colon n \geqslant l\}} \not\ni f_m(x_{n_1\ldots n_m}).$$

Таким образом, $f_m|_W$ разрывно. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m})^{-1}(W) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m}"'] & Y_{\tilde{\gamma}} \arrow[d, "\pi^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m}"] \\
W \arrow[r, "f_m"'] & Y_{\gamma_m}
\end{tikzcd}$$

коммутативна, причем $\tilde{f}|_{(\mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m})^{-1}(W)}$ и $\pi^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m}$ непрерывны, а отображение $\mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m}|_{(\mu^{\tilde{\gamma}}_{\gamma_m})^{-1}(W)}$ замкнуто. Тогда и отображение $f_m|_W$ непрерывно. Пришли к противоречию. Пусть теперь $F \subseteq X$ — произвольное замкнутое множество. Тогда F — полное по Чеху финально компактное пространство и в силу предложения 3.7 $f|_F$ — Z_σ-отображения. По доказанному выше найдётся такое открытое в F множество V, что $f|_V$ непрерывно. Предложение доказано.

Если $f\colon X \to Y$ — U-непрерывное отображение, то найдётся такая возрастающая трансфинитная последовательность открытых множеств U_α, $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$, что $\bigcup\{U_\alpha\colon 0 \leqslant \alpha < \alpha_0\} = X$ и отображение $f|_{U_{\alpha+1}\setminus U_\alpha}$ непрерывно, $\alpha < \alpha_0$. Запишем это формулой $f \in C_{\alpha_0}(X,Y)$.

Предложение 3.11. *Всякое Z_σ-отображение полного по Чеху наследственно финально компактного пространства в тихоновское пространство σ-непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение, где X — полное по Чеху наследственно финально компактное пространство, а Y — тихоновское пространство. В силу предложения 3.9 $f \in C_{\alpha_0}(X,Y)$ для некоторого α_0. Так как X наследственно финально компактно, то $\alpha_0 < \omega_1$. В силу совершенной нормальности X выполняется

$$U_{\alpha+1} \setminus U_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{\alpha_i}, \quad U_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \quad \alpha < \alpha_0,$$

где F_{α_i}, F_i замкнуты в X, $i \in \mathbb{N}$, $\alpha < \alpha_0$. Тогда

$$X = \bigcup\{F_{\alpha_i}\colon \alpha < \alpha_0,\ i \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

где отображения $f|_{F_{\alpha_i}}$ и $f|_{F_i}$ непрерывны, $\alpha < \alpha_0$, $i \in \mathbb{N}$. Так как в совершенно нормальном пространстве замкнутое множество является нуль-множеством, то предложение доказано.

Следствие 3.12. *Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-отображение K-аналитического совершенно нормального пространства X на тихоновское пространство Y. Тогда Y — тоже K-аналитическое совершенно нормальное пространство.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 найдутся полное по Чеху наследственно финально компактное пространство Z и непрерывное сюръективное отображение $g\colon Z \to X$. Тогда $fg\colon Z \to Y$ — сюръективное Z_σ-отображение, и в силу предложения 3.6 fg является σ-непрерывным, т. е. $Z = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, где $fg|_{F_i}$ непрерывно, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} fg(F_i)$, и следствие доказано.

Аналогично доказывается следствие 3.13.

Следствие 3.13. *Пусть $f\colon X \to Y$ — сюръективное Z_σ-отображение аналитического пространства X на тихоновское пространство Y. Тогда Y — аналитическое пространство.*

K-аналитические пространства финально компактны, а так как они замкнуты относительно счётных произведений, то это класс пространств, счётная степень которых финально компактна. Известно и их расширение — финально компактные Σ-пространства [31], которые обладают этим свойством. Оказывается, что K_σ-аналитические пространства также обладают этим свойством (предложение 3.14), но, в отличие от K-аналитических пространств и финально компактных Σ-пространств, не замкнуты относительно счётных произведений (предложение 3.18).

Предложение 3.14. *Произведение счётного семейства K_σ-пространств финально компактно.*

Для доказательства потребуются леммы, первая из которых проверяется непосредственно.

Лемма 3.15. *Пусть $f_i\colon X_i \to Y_i$ — σ-непрерывные отображения, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i\colon \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$ также σ-непрерывно.*

Лемма 3.16. *Пусть $f_i\colon Y_i \to Z_i$ — сюръективные Z_σ-отображения, Y_i — полные по Чеху финально компактные пространства и Z_i — тихоновские пространства, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\prod\limits_{i=1} f_i\colon \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \prod\limits_{i=1}^{n} Z_i$ — сюръективное Z_σ-отображение.*

Доказательство. Положим $f = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i$, $Y = \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $Z = \prod\limits_{i=1}^{n} Z_i$. Предварительно покажем, что если $V_i = \prod\limits_{i=1}^{n} V_{ij}$, $i \in \mathbb{N}$, и $V_{ij} \subseteq Z_j$ — конуль-множества, $j \leqslant n$, то $f^{-1}\Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i\Bigr)$ — F_σ- и G_δ-множество в Y. Найдутся непрерывные отображения $g_j\colon Z_j \to M_j$, где M_j — сепарабельные метрические пространства, и открытые множества $W_{ij} \subseteq M_j$, $i \in \mathbb{N}$, такие что $g_j^{-1}(W_{ij}) = V_{ij}$, $i \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$ (см. [12]). Тогда $\varphi_j = g_j f_j\colon Y_j \to M_j$ — Z_σ-отображения, и в силу предложения 3.6 φ_j являются σ-непрерывными, $1 \leqslant j \leqslant n$. Из леммы 3.15 следует, что

$$\varphi = \prod_{j=1}^{n} \varphi_i\colon Y \to \prod_{j=1}^{n} M_j$$

является σ-непрерывным. Пусть $W_i = \prod\limits_{j=1}^{n} W_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда

$$f^{-1}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\Bigr) = \varphi^{-1}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\Bigr) \text{ —}$$

F_σ- и G_δ-множество в Y.

Покажем теперь, что Z финально компактно. Достаточно доказать, что открытое покрытие Z из базисных множеств $\Bigl\{\prod\limits_{j=1}^{n} V_j^\alpha\Bigr\}$, где $V_j^\alpha \subseteq Z_j$ — конуль-множества, $1 \leqslant j \leqslant n$, содержит счётное подпокрытие. По доказанному выше

$\mu = \Big\{f^{-1}\Big(\prod\limits_{j=1}^{n} V_j^{\alpha}\Big)\Big\}$ таково, что для всякого $\mu' \subseteq \mu$, $|\mu'| \leqslant \aleph_0$, $\bigcup \mu' - F_\sigma$- и G_δ-множество в Y. Так как Y — полное по Чеху финально компактное пространство, то в силу леммы 3.5 μ содержит счётное подпокрытие. Итак, Z финально компактно.

Пусть $A \subseteq Z$ — нуль-множество. Тогда $Z \setminus A - F_\sigma$-множество в Z, следовательно, финально компактно. Тогда $Z \setminus A$ можно представить в виде $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$, где V_i — базисные множества в Z. По доказанному выше $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i\Big) - F_\sigma$- и G_σ-множество в Y, следовательно, таково и $f^{-1}(A)$. Лемма доказана.

Следствие 3.17. *Произведение конечного семейства K_σ-аналитических пространств — K_σ-аналитическое пространство.*

Замечание. Лемма неверна, если перемножать счётное (бесконечное) семейство отображений.

Доказательство предложения 3.14. Пусть X_i — K_σ-пространства, Y_i — полные по Чеху финально компактные пространства, $f_i\colon Y_i \to X_i$ — сюръективные Z_σ-отображения, $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $f = \prod\limits_{i=1}^{\infty} f_i\colon \prod\limits_{i=1}^{\infty} Y_i \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Достаточно доказать, что всякое открытое покрытие $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ вида $\mu = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$, где $\mu_n = \Big\{\prod\limits_{j=1}^{n} V_j^{\alpha} \times \prod\limits_{i>n} X_i\Big\}$ и V_j^{α} — коноль-множества, $V_j^{\alpha} \subseteq X_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, содержит счётное подпокрытие. В силу леммы 3.16 $\prod\limits_{j=1}^{n} f_j\colon \prod\limits_{j=1}^{n} Y_j \to \prod\limits_{j=1}^{n} X_j$ — Z_σ-отображение, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для всякого $\gamma' \subseteq \gamma_n$, $|\gamma'| \leqslant \aleph_0$, где $\gamma_n = \{f^{-1}(T)\colon T \in \mu_n\}$, $\bigcup \gamma' - F_\sigma$- и G_δ-множество в $\prod\limits_{j=1}^{\infty} Y_i$, $n \in \mathbb{N}$. Из леммы 3.5 следует, что $\gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ содержит счётное подпокрытие. Тогда и μ содержит счётное подпокрытие. Предложение доказано.

Предложение 3.18. *Произведение $\prod\{X_s\colon s \in S\}$ счётного семейства K_σ-аналитических пространств является K_σ-аналитическим пространством тогда и только тогда, когда все элементы семейства, кроме конечного их числа, являются K-аналитическими пространствами.*

Доказательство. Пусть $\tilde{S} \subset S$, X_s для $s \in \tilde{S} - K_\sigma$-аналитические пространства, X_s для $s \in S \setminus \tilde{S} - K$-аналитические пространства. Тогда $X = \prod\{X_s\colon s \in S \setminus \tilde{S}\} - K$-аналитическое пространство, как произведение счётного семейства K-аналитических пространств, и если $\tilde{S}$ конечно, то $\prod\{X_s\colon s \in S\} = \prod\{X_s\colon s \in \tilde{S}\} \times X - K_\sigma$-аналитическое пространство, как произведение конечного семейства K_σ-аналитических пространств. Остаётся доказать, что если $f \in C_\alpha\Big(Y, \prod\{X_s\colon s \in S\}\Big)$, где α — произвольный ординал, Y — полное по Чеху финально компактное пространство, подсемейство $\{X_s\colon s \in \tilde{S}\}$

не K-аналитических пространств бесконечно, то $f(Y) \neq \prod\{X_s\colon s \in S\}$. Докажем это утверждение индукцией по α.

Если $\alpha = 0$, то f — непрерывное отображение, и если $f(Y) = \prod\{X_s\colon s \in S\}$, то $\prod\{X_s\colon s \in S\}$ — K-аналитическое пространство, следовательно, все пространства X_s, $s \in S$, также K-аналитические. Пусть утверждение доказано для всех $\alpha < \beta$ и β — предельный ординал. Возьмём

$$f \in C_\beta\Bigl(Y, \prod\{X_s\colon s \in S\}\Bigr) \setminus \bigcup\Bigl\{C_\alpha\Bigl(Y, \prod\{X_s\colon s \in S\}\Bigr)\colon \alpha < \beta\Bigr\}$$

и бесконечное подсемейство $\{X_s\colon s \in \tilde{S}\}$ не K-аналитических пространств. Тогда $Y = \bigcup\{U_\gamma\colon \gamma < \beta\}$, $U_\gamma \subseteq U_{\gamma+1}$ — открытые множества и $f|_{U_{\gamma+1}\setminus U_\gamma}$ непрерывно, $\gamma < \beta$. Так как Y финально компактно, то в открытое покрытие $\{U_\gamma\colon \gamma < \beta\}$ впишем замкнутое счётное подпокрытие $\{F_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Представим $\tilde{S}$ в виде $\tilde{S} = \bigcup\{S_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, где $S_{n_1} \cap S_{n_1} = \varnothing$, если $n_1 \neq n_2$, и $|S_n| = \aleph_0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\pi_{S_n}\colon \prod\{X_s\colon s \in S\} \to \prod\{X_s\colon s \in S_n\}$ — проекция. Тогда $\varphi_n = f|_{F_n} \in \bigcup\bigl\{C_\alpha\bigl(F_n, \prod\{X_s\colon s \in S\}\bigr)\colon \alpha < \beta\bigr\}$ и $\pi_{S_n} \circ \varphi_n \in \bigcup\bigl\{C_\alpha\bigl(F_n, \prod\{X_s\colon s \in S_n\}\bigr)\colon \alpha < \beta\bigr\}$, следовательно, по предположению индукции $\pi_{S_n}\varphi_n(F_n) \neq \prod\{X_s\colon s \in S_n\}$. Тогда $f(Y) = \bigcup\{f(F_n)\colon n \in \mathbb{N}\} \neq \prod\{X_s\colon s \in S\}$, так как $\pi_{\tilde{S}} f(Y) \neq \prod\{X_s\colon s \in \tilde{S}\}$. Пусть теперь $\beta = \bar{\beta} + 1$. В этом случае $Y \setminus U_{\bar{\beta}} = F \neq \varnothing$ и $f|_F$ непрерывно. Пусть $s_1 \in \tilde{S}$. Множество $f(F)$ является K-аналитическим в $\prod\{X_s\colon s \in S\}$, следовательно, и $\pi_{\{s_1\}}(f(F))$ — K-аналитическое множество в X_{s_1}. Так как X_{s_1} не K-аналитическое пространство, то $\pi_{\{s_1\}}(f(F)) \neq X_{s_1}$. Так как $\pi_{\{s_1\}}(f(F))$ финально компактно, то выберем непустое нуль-множество $\Phi \subseteq X_{s_1} \setminus \pi_{\{s_1\}}(f(F))$. Тогда $\Phi \times \prod\{X_s\colon s \in S \setminus \{s_1\}\} = T$ — нуль-множество в $\prod\{X_s\colon s \in S\}$, следовательно, $f^{-1}(T)$ — F_σ- и G_δ-множество в Y и $f^{-1}(T) \cap F = \varnothing$. Тогда $f^{-1}(T)$ — полное по Чеху, финально компактное пространство и

$$f|_{f^{-1}(T)} \in \bigcup\Bigl\{C_\alpha\Bigl(f^{-1}(T), \Phi \times \prod\{X_s\colon s \in S \setminus \{s_1\}\}\Bigr)\colon \alpha < \beta\Bigr\}.$$

По предположению индукции

$$f(f^{-1}(T)) \neq \Phi \times \prod\{X_s\colon s \in S \setminus \{s_1\}\}.$$

Тогда и

$$f(Y) \not\supseteq \Phi \times \prod\{X_s\colon \setminus \{s_1\}\},$$

следовательно,

$$f(Y) \neq \prod\{X_s\colon s \in S\}.$$

Итак, утверждение справедливо для всех $\alpha \leqslant \beta$. Предложение доказано.

Следствие 3.19. *K_σ-аналитическое пространство X является K-аналитическим тогда и только тогда, когда $X^{\aleph_0}$ — K_σ-аналитическое пространство.*

Для доказательства нескольких предложений нам потребуется одно известное понятие и его свойства. Напомним, что подмножество $A \subseteq X$ называется счётно выделяемым [12], если найдутся сепарабельное метрическое пространство M и такое непрерывное отображение $f\colon X \to M$, что $A = f^{-1}f(A)$. Сформулируем ряд свойств счётно выделяемых подмножеств, которые либо известны, либо проверяются непосредственно.

1. Счётно выделяемые в X подмножества образуют σ-алгебру.

2. $A \subseteq X$ счётно выделяемо тогда и только тогда, когда найдётся такая последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ нуль-множеств в X, что для всякой точки $x \in A$ и всякой точки $y \notin A$ найдётся F_n, для которого $F_n \ni x$ и $F_n \not\ni y$.

3. Всякое бэровское подмножество в X является счётно выделяемым.

4. Если пространство X является совершенно нормальным, то всякое аналитическое подмножество в X счётно выделяемо.

5. Если $f\colon X \to Y$ — сюръективное бэровское отображение и $A \subseteq Y$ счётно выделяемо в Y, то $f^{-1}(A)$ счётно выделяемо в X.

6. Если X уплотняется на сепарабельное метрическое пространство, то всякое подмножество $A \subseteq Y$ счётно выделяемо.

7. Если X — перистое финально компактное пространство, $A \subseteq Y$ счётно выделяемо, то A финально компактно и перисто.

8. Если всякое замкнутое подмножество X счётно выделяемо, то этим же свойством обладает всякое подпространство $Y \subseteq X$ и всякое K-аналитическое подмножество X счётно выделяемо.

Предложение 3.20. *Пусть всякое замкнутое подмножество K_σ-аналитического пространства X является счётно выделяемым. Тогда X — K-аналитическое пространство.*

Доказательство. Пусть $f\colon Y \to X$ — сюръективное Z_σ-отображение, где Y — полное по Чеху финально компактное пространство. В силу предложения 3.10 пространство Y представимо в виде $Y = \bigcup\{V_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}$, где V_α — открытые в Y множества, $\alpha < \alpha_0$, $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$ и если β — предельный ординал, то $V_\beta = \bigcup\{V_\alpha\colon \alpha < \beta\}$, $f|_{V_{\alpha+1}\setminus V_\alpha}$ непрерывно, $\alpha < \alpha_0$. Для всякого замкнутого множества $F \subseteq Y$ положим $\alpha(F) = \min\{\beta\colon F \subseteq \bigcup\{V_\alpha\colon \alpha < \beta\}\}$. Докажем индукцией по $\alpha(F)$, что образ всякого замкнутого в Y множества — K-аналитическое пространство.

Пусть $\alpha(F) \leqslant 1$. Тогда $f|_F$ непрерывно, следовательно, $f(F)$ — K-аналитическое пространство. Предположим, что доказана K-аналитичность образов всех таких замкнутых множеств $F \subseteq Y$, что $\alpha(F) < \beta$, $\beta < \alpha_0$. Пусть $\Phi \subseteq Y$ замкнуто и $\alpha(\Phi) = \beta + 1$. Возможны два случая: 1) β — предельный ординал и 2) β — изолированный ординал. Рассмотрим первый случай. Тогда $\Phi \subseteq V_\beta = \bigcup\{V_\alpha\colon \alpha < \beta\}$. Так как Φ финально компактно, то впишем в открытое покрытие $\gamma = \{\Phi \cap V_\alpha\colon \alpha < \beta\}$ счётное замкнутое покрытие $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\alpha(\Phi_n) < \beta$, $n \in \mathbb{N}$, а по предположению индукции $f(\Phi_n)$ — K-аналитическое пространство. Так как $\Phi = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, то $f(\Phi) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(\Phi_n)$ — K-аналитическое пространство, как объединение последовательности K-аналитических множеств $f(\Phi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $\beta = \beta^- + 1$. Тогда $\tilde{\Phi} = \Phi \setminus V_{\beta^-} \neq \varnothing$ и $f|_{\tilde{\Phi}}$ непрерывно, следовательно, $f(\tilde{\Phi})$ — K-аналитическое подмножество в X. В силу свойства 8 счётно выделяемых подмножеств $f(\tilde{\Phi})$, а в силу свойства 1 и $f(\Phi) \setminus f(\tilde{\Phi})$ счётно выделяемы в $f(\Phi)$. Так как $f|_{\Phi}$ — бэровское отображение, то в силу свойства 5 $A = \Phi \setminus f^{-1}f(\tilde{\Phi})$ счётно выделяемо в Φ, следовательно, финально компактно в силу свойства 7. Множества A и $\tilde{\Phi}$ дизъюнктны, причём A финально компактно, а $\tilde{\Phi}$ замкнуто в Φ. Выберем такое счётное замкнутое (в Φ) покрытие $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ множества A, что $F_n \cap \tilde{\Phi} = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\alpha(F_n) < \beta$, $n \in \mathbb{N}$. По предположению индукции $f(F_n)$ — K-аналитическое пространство, $n \in \mathbb{N}$. Тогда и $f(\Phi) = f(\tilde{\Phi}) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ — K-аналитическое пространство, как объединение последовательности K-аналитических пространств. Предложение доказано.

Следствие 3.21. *Совершенное K_σ-аналитическое пространство является K-аналитическим пространством.*

В [14] дан критерий аналитичности K-аналитического пространства. Оказывается, что он справедлив и для K_σ-аналитических пространств.

Предложение 3.22. *Пусть X — K_σ-аналитическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X — аналитическое пространство,*
2) *X — пространство со счётной сетью,*
3) *X — пространство с G_δ-диагональю.*

Доказательство. Импликации $1 \to 2 \to 3$ справедливы для произвольных регулярных пространств. Так как K_σ-аналитическое пространство финально компактно и финально компактное пространство с G_δ-диагональю уплотняется на сепарабельное метрическое пространство, то утверждение 3 (в силу свойства 6 счётно выделяемых подмножеств) влечёт, что всякое подмножество X счётно выделяемо. Тогда из предложения 3.20 следует, что X — K-аналитическое пространство. Как показано в [14], из этого следует, что X — аналитическое пространство. Предложение доказано.

Напомним один из результатов отделимости множеств, обобщающий классический результат Н. Н. Лузина [8].

Теорема 3.23 (З. Фролик, [14, 20]). *Всякие два непересекающиеся K-аналитические множества в тихоновском пространстве отделяются непересекающимися бэровскими множествами.*

Мы распространим этот результат на K_σ-аналитические множества.

Предложение 3.24. *Всякие два непересекающиеся K_σ-аналитические множества в тихоновском пространстве отделяются непересекающимися бэровскими множествами.*

Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма 3.25. *Если множество A тихоновского пространства X отделяется бэровским множеством от всякого дизъюнктного с ним K-аналитического множества, то A отделяется бэровским множеством от всякого дизъюнктного с ним K_σ-аналитического множества.*

Доказательство. Пусть $A \cap B = \varnothing$, где B — K_σ-аналитическое множество, $f\colon Y \to B$ — Z_σ-отображение полного по Чеху финально компактного пространства Y на B. Тогда в силу предложения 3.10 $Y = \bigcup\{U_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}$, где $U_\alpha \subseteq U_{\alpha+1}$ — открытые множества и $f|_{U_{\alpha+1}\setminus U_\alpha}$ непрерывно, $\alpha < \alpha_0$. Для всякого бэровского в Y множества Z положим $\alpha(Z) = \min\{\alpha\colon Z \subseteq U_\alpha\}$. Индукцией по $\alpha(Z)$ покажем, что множество A отделяется бэровским множеством от $f(Z)$, где Z — бэровское подмножество Y. Если $\alpha(Z) = 0$, то $Z \subseteq U_0$ и $f|_Z$ непрерывно. Тогда $f(Z)$ — K-аналитическое множество, и утверждение следует из условия леммы. Пусть утверждение справедливо для всех таких бэровских множеств Z, что $\alpha(Z) < \beta$. Возьмём такое бэровское множество Z, что $\alpha(Z) = \beta$, и пусть β — предельный ординал. Так как Z финально компактно, то в открытое покрытие $\{Z \cap U_\alpha\colon \alpha < \beta\}$ впишем счётное покрытие $\{F_n\}_{n=1}^\infty$, состоящее из нуль-множеств в Z. Тогда F_n — бэровское подмножество Y и $\alpha(F_n) < \beta$, $n \in \mathbb{N}$. По предположению индукции найдутся бэровские в X множества $C_n \supseteq A$, для которых $C_n \cap f(F_n) = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$C = \bigcap_{n=1}^\infty C_n \supseteq A$$

и

$$C \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty f(F_n) = f(Z)\right) = \varnothing.$$

Пусть теперь $\beta = \bar\beta + 1$. В этом случае $Z \setminus U_{\bar\beta} \neq \varnothing$ и $f|_{Z\setminus U_{\bar\beta}}$ непрерывно. Множество $F = Z \setminus U_{\bar\beta}$ замкнуто в K-аналитическом множестве Z, следовательно, K-аналитично. Тогда $f(F)$ — K-аналитическое множество и $A \cap f(F) = \varnothing$. По условию леммы найдётся бэровское множество $C \supseteq A$, для которого $C \cap f(F) = \varnothing$. Так как отображение $f|_Z\colon Z \to f(Z)$ бэровское, то $T = f^{-1}(f(Z) \cap C) \cap Z$ — бэровское подмножество Z, не пересекающееся с F. Следовательно, $\alpha(T) \leqslant \bar\beta$, и по предположению индукции найдётся бэровское подмножество $C_1 \supseteq A$, для которого $C_1 \cap f(T) = f(Z) \cap C \cap C_1 = \varnothing$. Тогда $C_2 = C_1 \cap C \supseteq A$ и $C_2 \cap f(Z) = C_2 \cap (f(F) \cup f(T)) = \varnothing$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 3.24. Из теоремы З. Фролика (если положить множество A в лемме K-аналитическим) следует, что K-аналитическое множество отделяется бэровским множеством от всякого дизъюнктного с ним K_σ-аналитического множества (и наоборот). Пусть теперь A — K_σ-аналитическое множество. Тогда, по доказанному выше отделяясь бэровским множеством от всякого дизъюнктного с ним K-аналитического множества, A отделяется бэровским множеством (в силу леммы 3.25) и от всякого дизъюнктного с ним K_σ-аналитического множества. Предложение доказано.

Следствие 3.26. *K_σ-аналитическое множество тихоновского пространства является бэровским тогда и только тогда, когда дополнение до него является K_σ-аналитическим множеством.*

Предложение 3.27. *Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-биекция K_σ-аналитического пространства X на тихоновское пространство Y. Тогда f^{-1} — бэровское отображение, т. е. f — бэровский изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $T \subseteq X$ — бэровское подмножество X. В силу следствия 3.9 T и $X \setminus T$ являются K_σ-аналитическими множествами, и $f|_T\colon T \to f(X)$, $f|_{X\setminus T}\colon X \setminus T \to f(X \setminus T)$ — Z_σ-отображения в силу предложения 3.6. Тогда $f(T)$ и $f(X \setminus T)$ — K_σ-аналитические множества, и в силу следствия 3.26 $f(T)$ — бэровское множество в Y. Предложение доказано.

Теорема 3.28. *Пусть $f\colon X \to Y$ — Z_σ-биекция σ-компактного пространства X на тихоновское пространство Y. Тогда f^{-1} — Z_σ-отображение, то есть f — бэровский изоморфизм первого уровня.*

Доказательство. В силу предложения 3.25 f — бэровский изоморфизм. Пусть $T \subseteq X$ — нуль-множество. Тогда $f(T)$ — бэровское множество в Y. Найдётся непрерывное отображение $\varphi\colon Y \to M$, где M — такое сепарабельное метрическое пространство, что $f(T) = \varphi^{-1}\varphi(f(T))$ [11]. Композиция $\varphi f\colon X \to M$ является Z_σ-отображением. Пусть $T = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, где B_i — компакты, $i \in \mathbb{N}$. В силу предложения 3.6 $\varphi f|_{B_i} \to \varphi f(B_i)$ являются Z_σ-отображениями, $i \in \mathbb{N}$, следовательно, в силу предложения 3.3 σ-непрерывны. Тогда множества $\varphi f(B_i)$, $i \in \mathbb{N}$, σ-компактны, а потому и множество $\varphi f(T)$ является σ-компактным. Так как M — метрическое пространство, то $\varphi f(T)$ — Z_σ-множество, следовательно, и $f(T) = \varphi^{-1}\varphi f(T)$ — Z_σ-множество. Теорема доказана.

Применим полученные результаты для решения вопроса о сохранении размерности $\dim$. Напомним, что ранее была доказана следующая теорема.

Теорема 3.29 (Джейн, Роджерс, [24]). *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — бэровский изоморфизм первого уровня, X и Y — метрические σ-компактные пространства. Тогда $\dim X = \dim Y$.*

Затем этот результат был распространён на неметризуемый случай.

Теорема 3.30 (А. Ч. Чигогидзе, [18]). *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — бэровский изоморфизм первого уровня, X и Y — компакты. Тогда $\dim X = \dim Y$.*

Мы усилим этот результат.

Предложение 3.31. *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — Z_σ-биекция, где X — компакт, Y — тихоновское пространство. Тогда $\dim X = \dim Y$. Более того, найдётся компакт $B \subseteq X$, для которого $\dim B = \dim X$ и $\varphi|_B$ — гомеоморфизм.*

Для доказательства потребуется следующая теорема.

Теорема 3.32 (Даукер, [1]). *Если в нормальном пространстве X существует такое замкнутое множество F, что $\dim F \leqslant n$ и $\dim \Phi \leqslant n$ для всякого замкнутого множества Φ, $\Phi \cap F = \varnothing$, то и $\dim X \leqslant n$.*

Доказательство предложения 3.31. В силу предложения 3.10 X является объединением открытых множеств U_α, таких что все сужения $\varphi|_{U_{\alpha+1}\setminus U_\alpha}$ непрерывны. Для всякого замкнутого в X множества F положим $\alpha(F) = \min\{\alpha\colon F \subseteq U_\alpha\}$. Индукцией по $\alpha(F)$ докажем утверждение для всех замкнутых множеств $F \subseteq X$. При $\alpha = 0$ имеем $F \subseteq U_0$ и $\varphi|_F$ непрерывно. Пусть утверждение доказано для всех таких замкнутых множеств F, что $\alpha(F) < \gamma$. Пусть $\Phi \subseteq X$ замкнуто, $\Phi \subseteq U_\gamma$, но $\Phi \not\subseteq \bigcup\{U_\alpha\colon \alpha < \gamma\}$. Так как Φ компактно, то γ — изолированный ординал, т. е. $\gamma = \gamma^- + 1$ и $\Phi \setminus U_{\gamma^-} \neq \varnothing$. Положим $\Phi_1 = \Phi \setminus U_{\gamma^-}$. Существует две возможности: 1) $\dim \Phi_1 = \dim \Phi$, 2) $\dim \Phi_1 < \dim \Phi$.

Если $\dim \Phi_1 = \dim \Phi = \infty$, то в силу финальной компактности $\varphi(\Phi)$ утверждение доказано. Пусть $\dim \Phi_1 = \dim \Phi < \infty$. Тогда $\varphi|_{\Phi_1}$ — гомеоморфизм и достаточно доказать, что $\dim \varphi(\Phi_1) \leqslant \dim \Phi$. Отображение $g = \varphi|_\Phi\colon \Phi \to \varphi(\Phi)$ — Z_σ-биекция в силу предложения 3.28. Пусть T замкнуто в $\varphi(\Phi)$ и $T \cap \varphi(\Phi_1) = \varnothing$. Используя нормальность $\varphi(\Phi_1)$, выберем такое нуль-множество $T_1 \supseteq T$ в $\varphi(\Phi)$, что $T_1 \cap \varphi(\Phi_1) = \varnothing$. Тогда $g^{-1}(T_1) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — нуль-множества в Φ, $n \in \mathbb{N}$. Так как $F_n \cap \Phi_1 = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, то $\alpha(F_n) < \gamma$, и по предположению индукции $\dim F_n = \dim \varphi(F_n)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу предложения 3.28 g — бэровский изоморфизм первого уровня, следовательно, $\varphi(F_n)$ — F_σ-множество в $\varphi(\Phi)$, $n \in \mathbb{N}$, и в силу теоремы счётной суммы $\dim T_1 \leqslant \dim \Phi$. По теореме Даукера отсюда следует, что $\dim \Phi = \dim \varphi(\Phi)$. Рассмотрим второй случай: $\dim \Phi_1 < \dim \Phi$. Тогда в силу теоремы Даукера найдётся такое замкнутое в Φ множество Φ_2, что $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$ и $\dim \Phi_2 = \dim \Phi$. Так как $\Phi_2 \cap \Phi_1 = \varnothing$, то $\alpha(\Phi_2) < \alpha(\Phi)$, и по предположению индукции предложение доказано.

Литература

[1] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

[2] Архангельский А. В. Теоремы о мощности семейств множеств в бикомпактах // ДАН СССР. — 1976. — Т. 226, № 5. — С. 998—1001.

[3] Архангельский А. В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 29—84.

[4] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[5] Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.

[6] Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.

[7] Лузин Н. Н. О стационарных последовательностях // Труды физ.-мат. ин-та. — 1934. — Т. 5. — С. 125—147.

[8] Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: ГИТТЛ, 1953.

[9] Пестряков А. В. Бэровские функции и пространства бэровских функций. — Дисс.. . . канд. физ.-мат. наук. — Свердловск, 1987.

[10] Пыткеев Е. Г. О пространствах функций первого бэровского класса над K-аналитическими пространствами // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 3. — С. 108—116.

[11] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные структуры. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[12] Чобан М. М. Дескриптивная теория множеств в топологии // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 51. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 173—245.

[13] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[14] Analytic Sets. — New York, London: Academic Press, 1980.

[15] Blair R. L., Hager A. W. Extensions of zero-sets and of real-valued functions // Math. Z. — 1974. — Vol. 136, no. 1. — P. 41—52.

[16] Bourgain J. Some remarks on compact sets of first Baire class // Bull. Soc. Math. Belg. — 1978. — Vol. 30, no. 1. — P. 3—10.

[17] Bourgain J., Fremlin D. H., Talagrand M. Pointwise compact sets of Baire-measurable functions // Amer. J. Math. — 1978. — Vol. 100, no. 4. — P. 845—886.

[18] Chigogidze A. Ch. On Baire isomorphism of non-metrizable compacta // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1985. — Vol. 26, no. 4. — P. 811—820.

[19] Fremlin D. H. K-analytic spaces with metrizable compacta // Mathematika. — 1977. — Vol. 24. — P. 257—261.

[20] Frolik Z. Analytic and Borelian sets in general spaces // Proc. London Math. Soc. — 1970. — Vol. 31, no. 3. — P. 674—692.

[21] Godefroy B. Compact de Rosenthal // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 91, no. 2. — P. 293—306.

[22] Hansell R. W., Jayne J. E., Rogers C. A. Piece-wise closed functions and almost discretely σ-decomposable families // Mathematika. — 1985. — Vol. 32, no. 2. — P. 229—247.

[23] Jayne J. E. Structure of analytic Hausdorff spaces // Mathematika. — 1976. — Vol. 23. — P. 208—211.

[24] Jayne J. E., Rogers C. A. Borel isomorphisms at the first level. I // Mathematika. — 1979. — Vol. 26, no. 1. — P. 125—156.

[25] Jayne J. E., Rogers C. A. Piecewise closed functions // Math. Ann. — 1981. — Vol. 255, no. 4. — P. 499—518.

[26] Jayne J. E., Rogers C. A. Borel isomorphisms at the first level. II // J. Math. Pures Appl. — 1982. — Vol. 61, no. 2. — P. 177—205.

[27] Lorch E. Compactification, Baire functions, and Daniell integration // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1963. — Vol. 24. — P. 204—218.

[28] Nagami K. Σ-spaces // Fund. Math. — 1969. — Vol. 65, no. 2. — P. 169—192.

[29] Pol R. Note of compact sets of first Baire class functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 96. — P. 152—164.

[30] Pytkeev E. G. Cardinal invariants of spaces with point-countable T_0-pseudobases // Proc. of Steklov Inst. of Math. Suppl. 2. — 2001. — P. 196—207.

[31] Rosenthal H. P. The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces // Comp. Math. Suppl. — 1974. — Vol. 28, no. 1. — P. 88—111.

[32] Rosenthal H. P. Pointwise compact subsets of the first Baire class // Amer. J. Math. — 1978. — Vol. 99, no. 2. — P. 362—378.

[33] Szentmiklószy Z. S-spaces and L-spaces and Martin's axiom // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. — 1980. — Vol. 23. — P. 1139—1145.

[34] Williams S., Fleischman W. The G_δ-topology on compact spaces // Fund. Math. — 1974. — Vol. 83, no. 2. — P. 143—149.